Задачи с досрочного экзамена по курсу “Алгоритмы, модели, алгебры” (ВМК, 3 курс, 6 семестр, 317 группа)[1]

Вариант 1

1. Необходимость критерия поглощения. Почему правило $A \vee AB = A$ является частным случаем критерия поглощения? Можно ли упростить ДНФ $\bigvee_{(\sigma_1+\ldots+\sigma_n) mod 2=0} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$?

2. Алгоритмы вычисления оценок. Параметры формулы для вычисления оценок (общий случай).

Вариант 2

1. Критерий поглощения конъюнкций ДНФ (теорема Журавлёва). Доказать.

2. Дана таблица контроля из объектов s^1, s^2. Информационная матрица по классам K_1, K_2: $\left(\begin{array}{c|cc} & K_1 & K_2 \\ \hline s^1 & 1 & 0 \\ s^2 & 1 & 1 \end{array}\right)$ Операторы B_1, B_2, B_3 построили матрицы оценок: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Построить корректный алгоритм с решающим правилом $c(a) = \begin{cases} 1, a > 2 \\ \Delta, 1 \le a \le 2 \\ 0, a < 1 \end{cases}$

   Решение: в первую очередь найдём отмеченные пары для всех операторов B_i. Очевидно, что для оператора B_1 единственной отмеченной парой будет $(1,1)$, для оператора B_2 - $(2,1)$, а для оператора B_3 - $(2,2)$. Теперь найдём значения $D_i = min_{(r,t)\in M(B_i)}(\Gamma^t_{S^r}(B_i))$ (множества $M(B_i)$ здесь - множества отмеченных пар для оператора B_i). Так как все $M(B_i)$ здесь состоят из 1 элемента - $D_i = 3$. Из вида решающего правила $c(a)$ очевидно, что константы $c_1 = 1, c_2 = 2$. Множество $M_0 = \{(u,v) : \beta_{uv} = 0\}$ состоит из одной пары: $(1,2)$. Получаем, что $R_i = max_{(r,t)\in M_0}(\Gamma^t_{S^r}(B_i)) = 2$. По формуле нижней оценки для степени $Q \ge \frac{|\ln c_1| + \ln q + \ln l}{|\ln \nu|}$ (где l - число классов, а q - размер контрольной выборки) получаем приблизительно $Q \ge 3.42$. Для простоты вычислений возьмём $Q = 4$. Осталось записать формулу для оператора корректного алгоритма: $(c_1 + c_2)\Sigma_{i=1}^k(\frac{1}{D_i} \cdot B_i)^{K_i}$, где все $K_i = Q$. Получим, что искомый оператор равен $\frac{1}{27}(B_1^4 + B_2^4 + B_3^4)$, а матрица его оценок для контрольной выборки будет иметь вид $\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 83 & 24 \\ 83 & 83 \end{pmatrix}$.

   Ответ: Алгоритм имеет вид $c(\frac{1}{27}(B_1^4 + B_2^4 + B_3^4))$

Вариант 3

1. Доказать, что у монотонной функции алгебры логики сокращённая ДНФ не содержит отрицаний и совпадает с минимальной.

2. Вывести формулу вычисления оценок для случая: характеристические векторы опорных множеств:

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \ldots & k & k+1 & \ldots & n-1 & n \\ \hline 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{array}\right)$$

   $w(S_i) = w^i = 1$
   $w_t = 1\,(t = 1, \ldots, n)$
   $x_{11} = 1, x_{00} = x_{01} = x_{10} = 0$
   Метрики: $\rho_1, \ldots, \rho_n$; функция близости определяется параметрами $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$:
   $\mathcal{N}(\omega S, \omega S_i) = 1 \Leftrightarrow \rho_t(a_{it}, a_t) \le \varepsilon_t, \forall t \in \Omega$
   Решение: прежде всего запишем формулу для $\Gamma_j(S)$:

$$\Gamma_j(S) = \frac{1}{|K_j|} \sum_{S_i \in K_j} \omega(S_i) \sum_{\Omega \in \Omega_A} \omega(\Omega) \cdot V(S, S_i, \Omega)$$

[1] Обычно даётся 1 вопрос и 1 задача. Версия файла от 13.06.2006 ©$\mathrm{V_MX}$

Учтём, что $\forall t : \omega(S_t) = 1, \forall \Omega : \omega(\Omega) = 1$ и перейдём к суммированию по весам признаков:

$$\Gamma_j(S) = \frac{1}{|K_j|} \sum_{S_i \in K_j} \omega(S_i) \sum_{t=1}^{n} V_t(S, S_i)$$

Таким образом, наша задача - определить $V_t(S, S_i)$. Очевидно, что если $\mathcal{N}(kS, kS_i) = 0$ (здесь kS - часть описания S, состоящая только из первых k признаков), то $V_t(S, S_i) = 0$, т.к тогда ни по одному опорному множеству объекты S и S_i близки не будут. Теперь пусть $\mathcal{N}(kS, kS_i) = 1$. Пусть k_0 - максимальный номер признака, по которому объекты S и S_i не близки (тогда, очевидно, $k_0 > k$); в случае если $\mathcal{N}(S, S_i) = 1$ (объекты близки по всем признакам) - положим $k_0 = k$. Тогда:
если $t \geq k_0 \Rightarrow V_t(S, S_i) = t - k_0$,
если $k < t \leq k_0 \Rightarrow V_t(S, S_i) = 0$,
если $t \leq k \Rightarrow V_t(S, S_i) = n - k_0 + 1$.

Ответ: $\Gamma_j(S) = \dfrac{1}{|K_j|} \displaystyle\sum_{S_i \in K_j} \sum_{t=1}^{n} V_t(S, S_i)$, где $V_t(S, S_i) = \begin{cases} 0, \mathcal{N}(kS, kS_i) = 0 \\ 0, k < t \leq k_0 \\ t - k_0, t \geq k_0 \\ n - k_0 + 1, t \leq k \end{cases}$

Вариант 4

1. Теорема Блэйка-Квайна о построении сокращенной ДНФ.
2. Дана таблица контроля из объектов s^1, s^2, s^3. Информационная матрица по классам K_1, K_2, K_3:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & K_1 & K_2 & K_3 \\ \hline s^1 & 0 & 1 & 1 \\ s^2 & 1 & 0 & 1 \\ s^2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Операторы B_1, B_2, B_3 построили матрицы оценок: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Построить корректный алгоритм с решающим правилом $c(a) = \begin{cases} 1, a > 2 \\ \Delta, 1 \leq a \leq 2 \\ 0, a < 1 \end{cases}$. Какие тут отмеченные пары?

Вариант 5

1. Найти количество тупиковых тестов для набора из таких элементов: в классе K_1 1 элемент, $2m$ признаков, все значения нулевые. В K_2 m элементов:

$$\begin{pmatrix} 110000...0000 \\ 001100...0000 \\ 000011...0000 \\ .... \\ 000000...1100 \\ 000000...0011 \end{pmatrix}$$

В каждом элементе $2m$ признаков, в i-м элементе единицы в позициях $2i$ и $2i+1$, начиная с нуля.
Решение: матрица, порождающая тупиковые уравнения, совпадёт с матрицей класса K_2. Требуется найти количество сочетаний её столбцов, имеющих в каждой строке ровно одну 1, т.к именно такие сочетания столбцов будут соответствовать тупиковым тестам. Таким образом, так как во всех строках единицы в разных позициях, из каждой строки мы можем выбрать одну из 2 единиц, а строк $m \Rightarrow$ имеем 2^m комбинаций.
Ответ: 2^m тупиковых тестов.

Вариант 6

1. С помощью критерия поглощения упростить: $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \vee \overline{x_1} \cdot \overline{\overline{x_2} \cdot \ldots \cdot \overline{x_n}} \vee \ldots \vee \overline{x_1} \cdot \ldots \cdot \overline{x_n}$
   Решение: по правилу Де Моргана $\overline{x_1} \cdot \overline{\overline{x_2} \cdot \ldots \cdot \overline{x_n}} = \overline{x_1} \cdot x_2 \vee \ldots \vee \overline{x_1} \cdot x_n$, а так как все слагаемые, начиная с третьего, содержат как сомножитель $\overline{x_1} \cdot \overline{x_m}$, где $m+1$ равно номеру слагаемого, получаем, что они поглощаются вторым.
   Ответ: $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \vee \ldots \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_n}$

Вариант 7

1. Получить эффективные формулы оценок, если $\omega(i) = 1, i = 1 \ldots n$; $\omega(S_i) = 1, i = 1 \ldots m$;
   Функция близости $\mathcal{N}(\omega S, \omega S_i) = 1 \Leftrightarrow \rho(a_{it}, b_t) \le \varepsilon_t$, $\forall t \in \Omega$.
   (где $S = (b_1, \ldots, b_n)$; $S_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$)
   $x_{11} = 1; x_{01} = x_{10} = x_{00} = 0$;
   - По признакам $1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$, опорные множества - все подмножества мощности k_1;
   - По признакам $\left[\frac{n}{2}\right] + 1, \ldots, n$, опорные множества - все непустые подмножества.

Дополнительные вопросы

1. Докажите, что тестовые уравнения имеют решения и в результате получается ДНФ, конъюнкции которой порождают тесты.
2. Определение отмеченной пары.
3. Как у нас рисуется график в доказательстве последней теоремы?