Решения задач по функциональному анализу (2003 год).

1.
$$\|2x\| = 2\|x\| = \|x - y + x + y\| \leq \|x - y\| + \|x + y\|$$
в силу неравенства треугольника. Отсюда
$$\|x\| \leq \frac{\|x - y\| + \|x + y\|}{2} \leq \max(\|x - y\|, \|x + y\|)$$

2. Всюду в этой задаче будем обозначать рассматриваемое отображение $\|\cdot\|$.

A) Ответ: да.

Проверим все аксиомы нормы:

1) Пусть $x(t) \equiv 0$, $t \in [a, b] \Rightarrow \|x\| = 0$. Если же $\|x\| = 0$, то $x(t) \equiv 0$, $x \in [a, b]$. Следовательно, аксиома тождества выполнена.

2) Для любого $a \in R$ имеем
$$\|ax\| = \max_{t\in[a,b]} |ax(t)| = |a| \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = |a|\|x\|$$
Следовательно, аксиома линейности тоже выполнена.

3) Аксиома треугольника выполнена в силу соотношения
$$\max_{t\in[a,b]} |x(t) + y(t)| \leq \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |y(t)|,$$
которое следует из неравенства треугольника для модулей и очевидного соотношения (доказывается, например, от противного):
$$\max_{t\in[a,b]} (|x(t)| + |y(t)|) \leq \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |y(t)|$$

B) Ответ: нет.

Поскольку из $\|x\| = 0$ следует $x'(t) \equiv 0 \to x(t) \equiv c$, где c - произвольная константа. Следовательно, не выполнена аксиома тождества и данное отображение нормой не является.

C) Ответ: нет.

Невыполнение первой аксиомы нормы проверяется аналогично рассуждениям, проведенным в предыдущем пункте.

D) Ответ: да. Проверим все аксиомы нормы:

1) Если $x(t) \equiv 0$, то, очевидно, $\|x\| = 0$. Докажем обратное. Действительно, если $\|x(t)\| = 0$, то $\max_{t\in[a,b]} |x(t)| = 0$ и $x(a) = 0$. Из первого равенства следует, что $x(t) \equiv c$, $t \in [a, b]$, из второго - что $c = 0$. Получаем аксиому тождества.

2) Справедливость аксиомы линейности очевидна.

3) Аналогично доказательству, проведенному в пункте A), получаем соотношение

$$|x(a)+y(a)|+\max_{t\in[a,b]}|x'(t)+y'(t)| \leq \left(|x(a)| + \max_{t\in[a,b]}|x'(t)|\right)+\left(|y(b)| + \max_{t\in[a,b]}|y'(t)|\right)$$

откуда и следует справедливость аксиомы треугольника для данного отображения.

E) Ответ: да.

Проверим все аксиомы нормы: 1) Очевидно, что $x \equiv 0 \to \|x\| = 0$. Докажем обратное утверждение. Действительно, если $\|x\| = 0$, то $\int\limits_a^b |x(t)|dt = 0$ и $|x'(t)| \equiv 0$. Из второго равенства следует, что $x(t) \equiv c$, где c - константа, равная в силу первого соотношения нулю.

2) Справедливость аксиомы линейности очевидна.

3) Доказательство аналогично проведенным в пунктах A) и D).

3. A) Множество всех многочленов в пространстве $C[a,b]$ не является открытым в силу теоремы Фейера, согласно которой любая непрерывная на отрезке функция равномерно (т.е. по норме $C[a,b]$) приближается средними Чезаро частичных сумм своего ряда Фурье, которые алгебраическими многочленами не являются. Следовательно, любая окрестность произвольной точки данного множества содержит в себе функцию, не принадлежащую этому множеству.

B) Множество всех многочленов в пространстве $C[a,b]$ не является и замкнутым. Рассмотрим пример. Как известно, ряд Тейлора для функции $\sin x$ сходится к ней на всей числовой прямой, причем на любом ограниченном множестве - равномерно. Следовательно, частичные суммы этого ряда (суть алгебраические многочлены) сходятся к $\sin x$ в смысле нормы произвольного пространства $C[a,b]$ при любых конечных a и b. $\sin x$ не является алгебраическим многочленом, из чего следует незамкнутость данного множества.

4. Обозначим данное пространство через X, а его многообразие - через L. Докажем, что L замкнуто. Пусть это не так, т.е. существует $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$ $: x_n \to x_0,\ n \to \infty,\ x_0$ не принадлежит L. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \|x-x_0\|,\ x \in L$. Возьмем произвольный $x_1 \in L$ и рассмотрим замкнутый шар $\overline{\|x-x_0\|,\ x \in L. \ldots}$ $\overline{S_{\varphi(x_1)}(x_0)}$. Обозначим $L \cap S_{\varphi(x_1)}(x_0)$ через F. Тогда, очевидно, $\inf\limits_{x\in L}\varphi(x) = \inf\limits_{x\in F}\varphi(x)$. Множество F конечномерное, замкнутое, ограниченное, функция $\varphi(x) \in C(F)$ согласно неравенству треугольника $\Rightarrow \exists x_* \in F : \varphi(x_*) = \inf\limits_{x\in F}\varphi(x) = \inf\limits_{x\in L}\varphi(x)$. Отсюда $\rho(x_0, L) = \|x_0-x_*\| > 0$ по нашему предположению. Однако это противоречит сходимости последовательности $\{x_n\}$ к x_0. Следовательно, L замкнуто и является подпространством X.

5. Пусть это не так, т.е. $\exists x_0 \in L, \varepsilon > 0$: шар $S_\varepsilon(x_0) \subset L$. Чтобы придти к противоречию, покажем, что $\forall x_1 \in X x_1 \in L$.

$x_1 = (x_1 - x_0) + x_0$, $x_0 \in L \Rightarrow$ поскольку L - многообразие, достаточно показать, что $x_1 - x_0 \in L$.

$x_1 - x_0 = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{2\|x_1 - x_0\|}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}$.

$\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|} \in L$ по нашему предположению. Следовательно, по определению линейного многообразия $x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{2\|x_1 - x_0\|}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|} = x_1 \in L$. Мы пришли к противоречию с условием задачи, следовательно, L не содержит никакого шара.

6. Всюду в этой задаче будем обозначать рассматриваемое множество L.

A) Ответ: нет.

Поскольку L не является даже линейным многообразием. Рассмотрим, например, $f(x) = x \in L$, $g(x) = e^x \in L$. Но $h(x) = g(x) - f(x) = e^x - x$ не принадлежит L.

B) Ответ: да.

То, что L - линейное многообразие, очевидно. Докажем замкнутость L. Пусть это не так, т.е. $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L : x_n \to x$, $n \to \infty$, x не принадлежит L. Тогда $\exists t_0 \in (0,1] : x(t_0) \neq x(-t_0)$. По определению сходимости в пространстве $C[-1,1]$ $\max\limits_{t\in[-1,1]} |x_n(t) - x(t)| \to 0$, $n \to \infty$. Следовательно, имеет место сходимость рассматриваемой последовательности в точках t_0 и $-t_0$. Однако $x_n(-t_0) = x_n(t_0) \to x(t_0)$, $n \to \infty$, что противоречит сделанному предположению $x(t_0) \neq x(-t_0)$. Следовательно, L замкнуто и образует подпространство в $C[-1,1]$.

C) Ответ: нет.

Поскольку в пункте B) задачи 3 была доказана незамкнутость L относительно нормы пространства $C[-1,1]$.

D) Ответ: нет.

Покажем, что L не является замкнутым множеством. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [-1,0], \\ x^2 & , \quad x \in (0,1]. \end{cases}$$

Введем обозначения: $\frac{k}{2^n} = x_n^k$, $f(x_n^k) = f_n^k$, $k = 0,...,2^n$. Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} f_n^k + \frac{f_n^{k+1} - f_n^k}{x_n^{k+1} - x_n^k}(x - x_n^k) & , \quad x \in (x_n^k, x_n^{k+1}], k = 0,...,2^n, \\ 0 & , \quad x \in [-1,0]. \end{cases}$$

Очевидно, $f_n(x) \in L$. Покажем, что $f_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$, откуда будет следовать незамкнутость L в $C[-1,1]$.

Введем вспомогательную последовательность функций $\varphi_n(x) = f_n(x) - f(x)$ при $x \in (x_n^k, x_n^{k+1}]$, $k = 0$, ... , $2^n - 1$. Исследуем $\varphi_n(x) \in C^1[x_n^k, x_n^{k+1}], \forall k = 0,...,2^n - 1$ на экстремальные значения при $x \in [x_n^k, x_n^{k+1}]$, $k = 0,...,2^n - 1$.

$$\varphi_n'(x) = \frac{f_n^{k+1} - f_n^k}{x_n^{k+1} - x_n^k} - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f_n^{k+1} - f_n^k}{x_n^{k+1} - x_n^k} \Leftrightarrow x = \frac{x_n^{k+1} + x_n^k}{2}$$

$\forall k = 0,...,2^n - 1 \varphi_n(x_n^k) = \varphi_n(x_n^{k+1}) = 0$, $\varphi_n(x)$ выпукла вверх на любом из рассматриваемых отрезков, следовательно, она достигает максимума в той точке отрезка $[x_n^k, x_n^{k+1}]$, где ее производная обращается в нуль, т.е. при $x = \frac{x_n^{k+1}+x_n^k}{2}$. Поэтому

$$\max_{x\in[x_n^k, x_n^{k+1}]} \varphi_n(x) = \varphi_n\left(\frac{x_n^{k+1} + x_n^k}{2}\right) = \frac{1}{2^{2(n+1)}}$$

Очевидно, что $\max\limits_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max\limits_{k=0,\ldots,2^n-1} \max\limits_{x\in(x_n^k, x_n^{k+1}]} |f_n(x) - f(x)| = \max\limits_{k=0,\ldots,2^n-1} \max\limits_{x\in(x_n^k, x_n^{k+1}]} \varphi_n(x) = \max\limits_{k=0,\ldots,2^n-1} \frac{1}{2^{2(n+1)}} = \frac{1}{2^{2(n+1)}} \to 0, n \to \infty$.

Таким образом, получена последовательность функций из L, сходящаяся к функции, которая не принадлежит L. Следовательно, L не является подпространством $C[-1,1]$.

7. Всюду в этой задаче будем обозначать рассматриваемое множество L.

A) Ответ: да.
Это является следствием из задачи 4.

B) Ответ: нет.
Рассмотрим пример, демонстрирующий незамкнутость L относительно нормы пространства $C[-1,1]$. Пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} -x & , \quad x \in [-1, -\frac{1}{n}), \\ \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} & , \quad x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \\ x & , \quad x \in (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

при $n = 1, 2, \ldots$. Легко проверяется, что $\forall n$ $f_n(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[-1,1]$, однако

$$|f_n(x) - |x|| = f_n(x) - |x| = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [-1, -\frac{1}{n}) \cup (\frac{1}{n}, 1], \\ \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} - |x| & , \quad x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

$\max\limits_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n(0) = \frac{1}{2n} \to 0, n \to \infty$.

Таким образом, $f_n(x) \to |x|, n \to \infty$. Но $|x|$ не принадлежит L, следовательно, L не замкнуто.

C) Ответ: нет.

Рассмотрим пример, демонстрирующий незамкнутость L относительно нормы пространства $C[-1,1]$. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [-1,0), \\ \frac{2^{n+1}}{n}x - \frac{2}{n} & , \quad x \in (\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^{n+1}}], \\ -\frac{2^{n+1}}{n}x + \frac{4}{n} & , \quad x \in (\frac{3}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n-1}}]. \end{cases}$$

Тогда $f(x) \geq 0$, $x \in [-1,1]$, $f(\frac{1}{2^n}) = 0$, $n = 1,2,...$ и $\sup\limits_{x \in [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]} f(x) = f(\frac{3}{2^{n+1}}) = \frac{1}{n}$ по построению.

При $x \neq 0$ непрерывность этой функции очевидна. Непрерывность $f(x)$ при $x = 0$ следует из очевидной (в силу кусочной линейности и непрерывности $f(x)$ при $x \neq 0$) оценки $|f(x)| \leq \frac{1}{n}$ при $x \in (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ при произвольном $n \in N$. Покажем, что вариация функции $f(x)$ на отрезке $[-1,1]$ $\omega(f(x)) = +\infty$. Действительно, суммированием вариаций по полуинтервалам $(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ получаем, что $\omega(f(x)) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + ... = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Однако $f(x)$ может быть с любой точностью равномерно на отрезке $[-1,1]$ (т.е. по норме пространства $C[-1,1]$) приближена функцией с ограниченной вариацией. Фиксируем произвольный $\varepsilon > 0$ и рассмотрим функцию

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in (0, \frac{1}{2^n}), \\ 0 & , \quad x \in [-1,0] \cap [\frac{1}{2^n}, 1]. \end{cases}$$

при таком $n \in N$, что справедливо $\frac{1}{n} < \varepsilon$. $f_n(x) \in L$, т.к. она является кусочно-линейной и непрерывной на $[-1,1]$. В то же время $\max\limits_{x \in [-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max\limits_{x \in (0, \frac{1}{2^n})} |f_n(x) - f(x)| = \max\limits_{k=n,n+1,...} \max\limits_{\left(x \in (\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)} |f_n(x) - f(x)| = \max\limits_{k=n,n+1,...} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Тем самым показана незамкнутость L.

D) Ответ: да.

То, что L - линейное многообразие, очевидно. Возьмем $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset L$. Замкнутость L следует из цепочки соотношений:

$f_n \to f$ по норме C[-1,1] $\Leftrightarrow \max\limits_{x \in [-1,1]} |f_n(x) - f(x)| \to 0, n \to \infty \Rightarrow |f_n(0) - f(0)| \to 0, n \to \infty \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f(x) \in L$,т.к. равномерный предел последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией, а $f_n(0) \equiv 0$.

8. Фиксируем $\forall\, \varepsilon > 0$. Пусть $\|x_1 - x_2\| < \varepsilon$.

По определению $\rho(x, A) = \inf\limits_{y \in A} (x, y) = \inf\limits_{y \in A} \|x - y\|$. Пусть $\{y_n^1\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ - минимизирующая последовательность для x_1, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_1 - y_n^1\| = \rho(x, A)$. Тогда согласно неравенству треугольника $\|x_2 - y_n^1\| \leq \|x_1 - y_n^1\| + \|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - y_n^1\| + \varepsilon$. Следовательно, $\rho(x_2, A) = \inf\limits_{y \in A} \|x_2 - y\| \leq \lim\limits_{n \to \infty} \|x_2 - y_n^1\| \leq \lim\limits_{n \to \infty} \|x_1 - y_n^1\| + \varepsilon = \rho(x_1, A) + \varepsilon$. Аналогично показывается, что $\rho(x_1, A) \leq$

$pho(x_2, A) + \varepsilon$. Следовательно, $|\rho(x_2, A) - \rho(x_1, A)| \leq \varepsilon \Rightarrow$ функция $f(x) = \rho(x, A)$ непрерывна по определению (достаточно положить в нем $\delta = \varepsilon$).

9. Возьмем базис пространства X $e_1, e_2, ..., e_n$. Линейная оболочка $e_1, ..., e_n$ (обозначим ее $L(e_1, ..., e_n)$) по определению является линейным многообразием. В силу конечности базиса оно конечномерно; пространство X - линейное, нормированное $\Rightarrow L(e_1, ..., e_n)$ - подпространство пространства X (см. задачу №4). Следовательно, любая фундаментальная последовательность элементов из $L(e_1, ..., e_n)$ сходится по норме к элементу из $L(e_1, ..., e_n)$. По определению базиса линейного пространства $L(e_1, ..., e_n) = X \Rightarrow X$ - полное по своей норме пространство $\Rightarrow X$ - банахово.

10. X - банахово пространство $\Rightarrow$ оно является линейным, нормированным и полным относительно своей нормы. Рассмотрим его подпространство L. Оно линейно, т.к. является линейным многообразием в X. В L можно ввести норму, положив $\forall x \in L$ $\|x\|_L = \|x\|_X$. Из справедливости аксиом нормы в X очевидно следует справедливость их и в L. L - подпространство $\Rightarrow \forall$ фундаментальная последовательность элементов из L сходится к элементу из L. Из всего вышесказанного следует, что L - пространство, полное относительно своей нормы, т.е. банахово.

11. Ответ: да.

Рассмотрим банахово пространство R (пространство вещественных чисел) и последовательность непустых замкнутых вложенных множеств в нем: $X_i = [i, +\infty), i = \overline{1, +\infty}$. Очевидно, что $\cap_{i=1}^{\infty} X_i = \oslash$.

12. Преобразуем обе части рассматриваемого тождества, начиная с левой:

$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = (z-x, z-x) + (z-y, z-y) = 2(z,z) + (x,x) + (y,y) - (x,z) - (z,x) - (y,z) - (z,y)$

Теперь преобразуем правую часть:

$\frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(x-y, x-y) + 2\left(z - \frac{x+y}{2}, z - \frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(x,x) - \frac{1}{2}(x,y) - \frac{1}{2}(y,x) + \frac{1}{2}(y,y) + 2(z,z) - (z,x) - (z,y) - (x,z) + \frac{1}{2}(x,x) + \frac{1}{2}(x,y) - (y,z) + \frac{1}{2}(y,x) + \frac{1}{2}(y,y) = 2(z,z) + (x,x) + (y,y) - (x,z) - (z,x) - (y,z) - (z,y)$

Следовательно, тождество Аполлония действительно выполнено для $\forall x, y, z$ из пространства со скалярным произведением.

13. Необходимость очевидна. Действительно, $\forall x \perp L$ и $\forall y \in L$ справедливы соотношения

$$\|x-y\|^2 = (x-y, x-y) = (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|x\|^2$$

Докажем достаточность. Для этого воспользуемся теоремой Леви. Разложим x указанным в ней способом: $x = y + z, y \in L, z \perp L$. По условию $\|x\| \leq$

$\|x-h\|, \forall h \in L$, для доказательства утверждения необходимо доказать, что $y=0$. Имеем $\|y+z\| \leq \|y+z-h\|, \forall h \in L$. Пусть $h=y$. Тогда

$\|h+z\| \leq \|z\| \Leftrightarrow (h+z,h+z) \leq (z,z) \Leftrightarrow \{z \perp h\} \Leftrightarrow (h,h)+(z,z) \leq (z,z) \Rightarrow (h,h)=0 \Rightarrow h=0 \Rightarrow y=0$

14. То, что M является линейным многообразием, очевидно. Действительно, $\forall \alpha, \beta \in R, \forall x,y \in M$ рассмотрим $z=\alpha x+\beta y=(z_1,z_2,...)$.

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} x_k + \beta \sum_{k=1}^{n} y_k = 0$$

Следовательно, $z \in M$.

Докажем замкнутость L относительно нормы l_2. Пусть $x^1, x^2, ... \in M, x^k \to x \in l_2, k \to \infty$. Докажем, что $x \in M$. Из сходимости в l_2 следует, что

$\sum\limits_{l=1}^{\infty}(x_l^k - x_l)^2 \to 0, k \to \infty \Leftrightarrow \sum\limits_{l=1}^{n}(x_l^k - x_l)^2 + \sum\limits_{l=n+1}^{\infty}(x_l^k - x_l)^2 \to 0, k \to \infty \Rightarrow \sum\limits_{l=1}^{n}(x_l^k - x_l)^2 \to 0, k \to \infty \Rightarrow x_l^k \to x_l, k \to \infty, \forall l=1,...,n \Rightarrow x_l = 0, \forall l = 1,...,n$, т.к. $x^k \in M, \forall k=1,2,...$

Следовательно, $x \in M \Rightarrow M$ - замкнуто относительно нормы в l_2, т.е. является подпространством в l_2.

Построим ортогональное дополнение N к подпространству M, тогда, по следствию из теоремы Леви, $M \bigoplus N = l_2$. Возьмем $\forall y \in N$. Докажем, что $y_p = 0, \forall p > n$. Пусть $x : x_p = 1, x_i = 0, \forall i \neq p$. Очевидно, что $x \in l_2$. По выбору x имеем $(x,y) = y_p \neq 0$. Но $y \in N$, мы пришли к противоречию $\Rightarrow y_i = 0, \forall y \in N, \forall i \geq n+1$.

Теперь очевидно, что $N = L(e^N)$, где

$$e_i^N = \begin{cases} 1 & , \quad i=1,...,n; \\ 0 & , \quad i=n+1,n+2,.... \end{cases}$$

Докажем это. Пусть $X_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i, \forall x = (x_1,x_2,...) \in l_2$. Запишем тогда x в следующем виде:

$$x = X' + X'' = \frac{X_n e^N}{n} + X''$$

Видно, что $X' \in L(e^N)$.

$$X_n'' = X_n - X_n' = X_n - n\frac{X_n}{n} = 0 \Rightarrow x_n'' \in M$$

Следовательно, $\forall x \in l_2$ раскладывается по M и $L(e^N)$. Очевидно, что $e^N \perp M \Rightarrow L(e^N) \perp M$. Из последних двух утверждений следует, что $L(e^N) = M^{\perp}$. Итак, в качестве N можно взять

$L(e^N) = \{x \in l_2 : x_i = \alpha, \forall \alpha \in R, \forall i = 1, ..., n; x_i = 0, \forall i = n+1, n+2, ...\}$

15. Пространство l_2 является гильбертовым. Согласно известному утверждению, множество в гильбертовом пространстве всюду плотно $\Leftrightarrow$ лишь нулевой элемент пространства ортогонален всем элементам этого множества. Докажем, что рассматриваемое множество $L(x_1, x_2, ...)$ обладает этим свойством. Пусть это не так, т.е. $\exists f = (f^1, f^2, ...) \in l_2 : f \neq 0$, но $f \perp x_k$ при $\forall k \in N$. Рассмотрим $p \in N : f^1 = f^2 = ... = f^{p-1} = 0$, но $f^p \neq 0$. Т.к. $f \in l_2$, $\exists C > 0 : |f^n| \leq C, \forall n \in N$. Тогда $\forall k \in N$

$$\left| \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{f^n}{2^{kn}} \right| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{C}{(2^k)^n} = C \frac{\frac{1}{2^{k(p+1)}}}{1 - \frac{1}{2^k}} \leq \{\forall k \in N\} \leq \frac{2C}{2^{k(p+1)}}$$

С другой стороны, нами получено, что

$$\frac{f^p}{2^{kp}} = - \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{f^n}{2^{kn}}$$

Таким образом,

$$\left| \frac{f^p}{2^{kp}} \right| \leq \frac{2C}{2^{k(p+1)}}, \forall k \in N$$

Однако

$$\frac{\frac{2C}{2^{k(p+1)}}}{\frac{f^p}{2^{kp}}} = \frac{2C}{f^p 2^k} \to 0, k \to \infty$$

что, очевидно, противоречит тому, что

$$\frac{\frac{2C}{2^{k(p+1)}}}{\frac{f^p}{2^{kp}}} \geq 1, \forall k \in N$$

Следовательно, наше предположение о существовании ненулевого элемента пространства l_2, ортогонального сразу всем элементам $L(x_1, x_2, ...)$, неверно, откуда следует, что это множество всюду плотно в l_2.

16. В силу свойств производной $\forall \alpha, \beta \in R, \forall x, y \in C^1[a, b]$ имеем

$$A(\alpha x + \beta y) = \frac{d}{dt}(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha \frac{dx(t)}{dt} + \beta \frac{dy(t)}{dt} = \alpha Ax + \beta Ay$$

Следовательно, оператор A линеен.

Для доказательства ограниченности оператора A, покажем, что он переводит замкнутый единичный шар с центром в нуле в пространстве $C^1[a, b]$ в ограниченное множество в пространстве $C[a,b]$ (в силу линейности оператора A этого достаточно). $\forall x \in \overline{S_1(0)}$ имеем

$$\|x\|_{C^1} = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)| \le 1 \Rightarrow \|Ax\|_C = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| \le 1$$

Итак, оператор A является линейным и ограниченным. Найдем его норму. Как видно из вышеприведенных выкладок $\|Ax\|_C \le \|x\|_{C^1} \Rightarrow \|A\| \le 1$. Покажем, что $\|A\| = 1$. Рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = \frac{\sin nt}{n+1}, n = 4, 5, \ldots$.

$$\|x_n\|_{C^1} = \max_{t\in[0,1]} \left|\frac{\sin nt}{n+1}\right| + \max_{t\in[0,1]} \left|\frac{n\cos nt}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = 1, \forall n = 4, 5, \ldots$$

В то же время

$$\|Ax\|_C = \max_{t\in[0,1]} \left|\frac{n\cos nt}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1, n \to \infty$$

Итак, мы получили максимизирующую последовательность элементов из $C^1[a,b]$, показывающую, что $\|A\| = 1$.

B) Линейность оператора A следует из свойства линейности интеграла Лебега. Докажем ограниченность A. $\forall x \in \overline{S_1(0)}$ имеем

$$\|Ax(t)\| = \left(\int_0^1 \left(t\int_0^1 x(\tau)d\tau\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 t^2dt \left(\int_0^1 x(\tau)d\tau\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \left|\int_0^1 x(\tau)d\tau\right| \le$$

$\{$ неравенство Коши-Буняковского $\} \le \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\int_0^1 x^2(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 1^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

Оператор A ограничен.

Найдем норму оператора A. Для этого возьмем $x(t) \equiv 1, t \in [0,1]$. Тогда $\|x\| = 1$, а $\|Ax\| = \left(\int_0^1 t^2dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Нами было показано, что $\forall x \in \overline{S_1(0)}$ $\|Ax\| \le \frac{1}{\sqrt{3}}$. В то же время нашелся элемент из $\overline{S_1(0)}$, на котором это значение нормы образа достигается $\Rightarrow \|A\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

17. A) $R(A) = \{y \in Y : \exists x \in X : Ax = y\}$

Для того, что R(A) было линейным многообразием, необходимо выполнение условия:

$\forall \alpha, \beta, \forall y_1, y_2 \in R(A) \Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 \in R(a)$, то есть $\exists x \in X : Ax = \alpha y_1 + \beta y_2$.

Так как $y_1, y_2 \in R(A) \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in X : Ax_1 = y_1, Ax_2 = y_2$.

Из того, что A линейный оператор следует $A\alpha x_1 = \alpha y_1, A\beta x_2 = \beta y_2$ и $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$.

Так как X линейное пространство, то $\alpha x_1 + \beta x_2 \in X$, что и т. д.

B) Ответ: нет.

Рассмотрим оператор $A : C^2[-1,1] \to C[-1,1], Af(t) = \frac{df}{dx}$. Тогда, очевидно, $R(A) \in C^1[-1,1]$. Рассмотрим последовательность непрерывно дифференцируемых функций из задачи 7В), а именно

$$f_n(x) = \begin{cases} -x & , \quad x \in [-1, -\frac{1}{n}), \\ \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} & , \quad x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \\ x & , \quad x \in (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Пусть $g_n(x) = \int\limits_{-1}^{x} f_n(x)dx$. Тогда $g_n(x) \in C^2[-1,1]$ и, очевидно, $Ag_n = f_n$. В задаче 7В) показано, что $f_n(x) \to f(x) = |x|$ по норме пространства $C[-1,1]$ при $n \to \infty$. Однако $f(x) = |x|$ не принадлежит пространству $C^1[-1,1]$. Как установлено нами в начале доказательства $R(A) \in C^1[-1,1] \Rightarrow$ $R(A)$ не является замкнутым множеством, а значит, не является и подпространством.

18. Согласно теореме 3 из §7 пространство $L(X \to X)$ линейных непрерывных операторов, действующих в банаховом пространстве, само является банаховым, т.е. любая фундаментальная последовательность элементов из этого пространства сходится к элементу этого же пространства. Рассмотрим операторную последовательность $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Если $A \in L(X \to X)$, то и $A_n \in (X \to X), \forall n \in N$ (в самом деле, линейность A_n очевидна, а непрерывность вытекает из того, что A_n суть суперпозиция конечного числа непрерывных операторов). Следовательно, если мы докажем фундаментальность $\{A_n\}$, то тем самым мы докажем существование и принадлежность пространству $L(X \to X)$ оператора $\sin A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Фундаментальность последовательности $\{A_n\}$ следует из следующих соотношений:

$\|A_{n+p} - A_n\| = \left\| \sum\limits_{k=n}^{n+p} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!} \right\| \leq \{\|AB\| \leq \|A\|\|B\|, \forall A, B \in L(X \to X)$, что следует из определения операторной нормы$\} \leq \sum\limits_{k=n}^{n+p} \frac{(-1)^k \|A\|^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq$ $\{\forall p \in N\} \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \to 0, n \to \infty$, т.к. это хвост сходящегося ряда для $e^{\|A\|}$.

Следовательно, $\{A_n\}$ фундаментальна и определенность оператора $\sin A, \forall A \in L(X \to X)$ доказана. Случай с $\cos A$ разбирается совершенно аналогично.

19. По определению $e^A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!}, \forall A \in L(X \to X)$.

$\left\| \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \{\forall n \in N\} \leq \left\| \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \right\| + \left\| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\|A\|^k}{k!} + \left\| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$, т.к. $\left\| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \to 0$, что следует из сходимости ряда в смысле нормы в $L(X \to X)$.

Тем самым утверждение доказано. Найдем e^I по определению:

$$(e^I)x = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{I^k}{k!}\right)x = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{I}{k!}\right)x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{Ix}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x}{k!} = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = ex, \forall x \in X \Rightarrow e^I = eI.$$

20. Обозначим $x_1 = dx/dt$, $x_2 = dx_1/dt$. Тогда задача примет вид:

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_2 \\ dx_2/dt = -x_1 + y(t) \\ x_1(0) = x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Или $\frac{dX}{dt} = BX + Y$, где $X = (x_1, x_2)$, $Y = (0, y(t))$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

По теореме Каратеодори

(задача Коши

$$\begin{cases} dX/dt = BX(t) + Y(t), t \in [t_0, t_1] \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

где $Y(t)$ интегрируема по Лебегу, имеет единственное решение в классе абсолютно непрерывных функций и это решение дается формулой $X(t) = e^{(t-t_0)B}(X_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-sB}Y(s)ds))$

решение этой задачи выглядит так: $X(t) = e^{tB}(X_0 + \int\limits_0^t e^{-sB}Y(s)ds)$

$e^{tB} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$, $e^{-sB} = \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix}$

Тогда $x(t) = x_1(t) = -(\cos(t)\int\limits_0^t y(s)\sin(s)ds + \sin(t)\int\limits_0^t y(s)\cos(s)ds)$

Заметим, что $\|x(t)\| = \| -(\cos(t)\int\limits_0^t y(s)\sin(s)ds + \sin(t)\int\limits_0^t y(s)\cos(s)ds)\| \leq$ $\|y(t)\||\cos(t)\int\limits_0^t \sin(s)ds| + |\sin(t)\int\limits_0^t \cos(s)ds| \leq 4\|y(t)\|$

21. По определению $\exists A^{-1}$, если $\exists!$ решение задачи $Ax(t) = y(t)$.

Пусть $N(A) = \{x \in C[0,1] : Ax = 0\}$.

$0 = \int\limits_0^t e^{-|s-t|}x(s)ds = \int\limits_0^t e^{s-t}x(s)ds = e^{-t}\int\limits_0^t e^s x(s)ds$

$0 = \int\limits_0^t e^s x(s)ds$

$0 = e^s x(s) \forall s \in [0,1]$

$0 = x(s) \forall s \in [0,1]$

$N(A) = \{\theta\}$

Пусть $\exists x_1(t), x_2(t) \in C[0,1] : Ax_1(t) = Ax_2(t) = y(t)$

$Ax_1(t) - Ax_2(t) = 0$
$A(x_1(t) - x_2(t)) = 0$
$x_1(t) - x_2(t) = 0$
$x_1(t) = x_2(t)$

24. Другими словами, надо доказать, что $\forall c \in C\ \exists x \in X : f(x) = c$

Известно, что dim C = 2. Если мы докажем, что R(f)(область изменения линейного функционала f) содержит 2 линейно-независимых вектора, то благодаря линейности функционала мы получаем все C, так как $C = \{y = ae_1 + be_2, \forall a, b \in R\, e_1, e_2$ базис в C $\}$.

Пусть $z : f(z) = 0 \Rightarrow f(z) = x + iy$. Так как X комплексное линейное пространство, то $ix \in X \Rightarrow f(ix) = ix - y \in R(f)$.

Докажем линейную независимость f(x) и f(ix):

$a(x + iy) + b(ix - y) = 0 \Leftrightarrow ax - by = ay + bx = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow$ f(x) и f(ix) линейно независимы.

25. Линейность:

$f(\alpha x) = 2[\alpha x(1) - \alpha x(0)] = 2\alpha[x(1) - x(0)] = \alpha f(x)$

$f(x+y) = 2[(x(1) + y(1)) - (x(0) + y(0))] = 2[x(1) - x(0)] + 2[y(1) - y(0)] = f(x) + f(y)$

Непрерывность: Линейный оператор непрерывен $\Leftrightarrow$ он ограничен. Поэтому достаточно доказывать ограниченность оператора.

$\|f(x)\| = 2|x(1) - x(0)| \leq 4\|x(t)\|$

Норма: $\|f\| = \sup\limits_{x(t) \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$. Заметим, что из доказательства ограниченности f(x) видно, что $\|f\| \leq 4$. Если мы найдем функцию, в которой значение для $\|f\|$ достигает 4, то норма этого линейного функционла равна 4. Рассмотрим $\cos(\pi(x+1))$

$\cos(\pi(0+1) = -1$
$\cos(\pi(1+1) = 1$

$\|f\| = \sup\limits_{x(t) \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|f(cos(\pi(x+1)))\|}{\|cos(\pi(x+1))\|} = 4$ B) $f(x) = \langle x, f \rangle = \int\limits_{-1}^{0} x(t)dt - \int\limits_{0}^{1} x(t)dt$.

Решение: Линейность:

$f(\alpha x) = \int\limits_{-1}^{0} \alpha x(t)dt - \int\limits_{0}^{1} \alpha x(t)dt = \alpha \int\limits_{-1}^{0} x(t)dt - \alpha \int\limits_{0}^{1} x(t)dt = \alpha f(x)$

$f(x+y) = \int\limits_{-1}^{0} x(t) + y(t)dt - \int\limits_{0}^{1} x(t) + y(t)dt = \int\limits_{-1}^{0} x(t) + dt \int\limits_{-1}^{0} y(t)dt - (\int\limits_{0}^{1} x(t)dt + \int\limits_{0}^{-1} y(t)dt = f(x) + f(y)$

Непрерывность: Линейный оператор непрерывен $\Leftrightarrow$ он ограничен. Поэтому достаточно доказывать ограниченность оператора.

$\|f(x)\| = |\int\limits_{-1}^{0} x(t)dt - \int\limits_{0}^{1} x(t)dt| \leq \int\limits_{-1}^{0} |x(t)|dt + \int\limits_{0}^{1} |x(t)|dt\ leq \|x(t)\|(\int\limits_{-1}^{0} 1dt+$
$\int\limits_{0}^{1} 1dt) \leq 2\|x(t)\|$

Норма: $\|f\| = \sup\limits_{x(t)\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$. Заметим, что из доказательства ограниченности f(x) видно, что $\|f\| \leq 2$. Если мы найдем последовательность функций, в пределе которой значение для $\|f\|$ достигает 2, то норма этого линейного функционла равна 2. Рассмотрим

$$x_n = \begin{cases} 1, x < -1/n \\ -sin\pi nx, x \in [-1/n, 1/n] \\ -1, x > 1/n \end{cases}$$

$$z(t) = \lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 1, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x > 0 \end{cases}$$

$\|f\| = \sup\limits_{x(t)\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|f(z(t))\|}{\|z(t)\|} = 2$

26. Линейность:

$f(\alpha x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha\alpha_k x(t_k) = \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x(t_k) = \alpha f(x)$

$f(x+y) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k(x(t_k)+y(t_k)) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x(t_k) + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k y(t_k) = f(x)+$
$f(y)$

Непрерывность: Линейный оператор непрерывен $\Leftrightarrow$ он ограничен. Поэтому достаточно доказывать ограниченность оператора.

$\|f(x)\| = |\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x(t_k)| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k||x(t_k)| \leq \|x(t)\| \sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|$

Норма: $\|f\| = \sup\limits_{x(t)\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$. Заметим, что из доказательства ограниченности f(x) видно, что $\|f\| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|$. Если мы найдем функцию, в которой значение для $\|f\|$ достигает $\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|$, то норма этого линейного функционала равна $\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|$. Рассмотрим z(t) построенную таким образом: в точках t_k она принимает значение $sign(\alpha_k)$, в других точках необходимо дополнить функцию по непрерывности.

$\|f\| = \sup\limits_{x(t)\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|f(z(t))\|}{\|z(t)\|} = \sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|$

В) $f(x) = \langle x, f\rangle = \int\limits_{-1}^{1} x(t)dt - x(0)$,

где $\alpha_k \in$ R, $t_k \in [-1, 1]$.

Решение: Линейность:

$$f(\alpha x)=\int\limits_{-1}^{1}\alpha x(t)dt-\alpha x(0)=\alpha(\int\limits_{-1}^{0}x(t)dt-x(0))=\alpha f(x)$$

$$f(x+y)=\int\limits_{-1}^{0}x(t)+y(t)dt-(x(0)+y(0))=\int\limits_{-1}^{0}x(t)dt-x(0)+\int\limits_{-1}^{0}y(t)dt-$$
$y(0)=f(x)+f(y)$

Непрерывность: Линейный оператор непрерывен $\Leftrightarrow$ он ограничен. Поэтому достаточно доказывать ограниченность оператора.

$$\|f(x)\|=|\int\limits_{-1}^{0}x(t)dt-x(0)|\leq\int\limits_{-1}^{0}|x(t)|dt+|x(0)|\leq\|x(t)\|(\int\limits_{-1}^{0}1dt+1)\leq$$
$2\|x(t)\|$

Норма: $\|f\|=\sup\limits_{x(t)\neq 0}\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$. Заметим, что из доказательства ограниченности f(x) видно, что $\|f\|\leq 2$. Если мы найдем последовательность функций, в пределе которой значение для $\|f\|$ достигает 2, то норма этого линейного функционла равна 2. Рассмотрим

$$x_n=\begin{cases}1, x<-1/n\\ -cos\pi nx, x\in[-1/n,1/n]\\ 1, x>1/n\end{cases}$$

$$z(t)=\lim_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}1, x<0\\ -1, x=0\\ 0, x>0\end{cases}$$

$$\|f\|=\sup_{x(t)\neq 0}\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}=\frac{\|f(z(t))\|}{\|z(t)\|}=2$$

27. A) $|\langle x,f\rangle|=|\int\limits_{0}^{1}x(t^2)dt|=|\int\limits_{0}^{1}\frac{x(t^2)}{2t}d(t^2)|=[y=t^2]|\int\limits_{0}^{1}\frac{x(y)}{2\sqrt{y}}dy|\leq\|x(y)\||\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{2\sqrt{y}}dy|=$
$\|x(y)\|\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{\delta}^{1}\frac{1}{2\sqrt{y}}dy=\|x(y)\|\lim\limits_{\delta\to 0}\sqrt{y}|_{\delta}^{1}=\|x(y)\|$

B) $|\langle x,f\rangle|=|\int\limits_{0}^{1}x(t^n)dt|=|\int\limits_{0}^{1}\frac{x(t^n)}{nt^{n-1}}d(t^n)|=[y=t^n]|\int\limits_{0}^{1}\frac{x(y)}{ny^{\frac{n-1}{n}}}dy|\leq\|x(y)\||\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{ny^{\frac{n-1}{n}}}dy|=$
$\|x(y)\|\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{\delta}^{1}\frac{1}{ny^{\frac{n-1}{n}}}dy=\|x(y)\|\lim\limits_{\delta\to 0}y^{1/n}|_{\delta}^{1}=\|x(y)\|$

28. A) Линейность:

$$f(\alpha x)=\int\limits_{-1}^{1}\alpha tx(t)dt=\alpha\int\limits_{-1}^{1}tx(t)dt=\alpha f(x)$$

$$f(x+y)=\int\limits_{-1}^{1}tx(t)+ty(t)dt=\int\limits_{-1}^{1}tx(t)dt+\int\limits_{-1}^{1}ty(t)dt=f(x)+f(y)$$

Непрерывность: Линейный оператор непрерывен $\Leftrightarrow$ он ограничен. Поэтому достаточно доказывать ограниченность оператора.

$$\|f(x)\| = |\int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt| \leq \int\limits_{-1}^{1} |t||x(t)|dt \leq \|x(t)\|(\int\limits_{-1}^{1} |t|dt) = \|x(t)\|(\int\limits_{-1}^{0} -tdt+$$

$$\int\limits_{0}^{1} tdt) \leq \|x(t)\|$$

Норма: $\|f\| = \sup\limits_{x(t)\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$. Заметим, что из доказательства ограниченности f(x) видно, что $\|f\| \leq 1$. Если мы найдем последовательность функций, в пределе которой значение для $\|f\|$ достигает 1, то норма этого линейного функционла равна 1. Рассмотрим

$$x_n = \begin{cases} -1, x < -1/n \\ sin\pi nx, x \in [-1/n, 1/n] \\ 1, x > 1/n \end{cases}$$

$$z(t) = \lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$$

$$\|f\| = \sup_{x(t)\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|f(z(t))\|}{\|z(t)\|} = 1$$

В) Линейность:

$$f(\alpha x) = \int\limits_{-1}^{1} \alpha tx(t)dt = \alpha \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt = \alpha f(x)$$

$$f(x+y) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t) + ty(t)dt = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt + \int\limits_{-1}^{1} ty(t)dt = f(x) + f(y)$$

Непрерывность: Линейный оператор непрерывен $\Leftrightarrow$ он ограничен. Поэтому достаточно доказывать ограниченность оператора.

$$\|f(x)\| = |\int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt| \leq \int\limits_{-1}^{1} |t||x(t)|dt \leq \|x(t)\| \max_{t\in[-1,1]} |t| \leq \|x(t)\|$$

Норма: $\|f\| = \sup\limits_{x(t)\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$. Заметим, что из доказательства ограниченности f(x) видно, что $\|f\| \leq 1$. Если мы найдем последовательность функций, в пределе которой значение для $\|f\|$ достигает 1, то норма этого линейного функционла равна 1. Рассмотрим

$$x_n = \begin{cases} 0, x < 1 - 1/n \\ n, x \geq 1 - 1/n \end{cases}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} tx_n(t)dt = \int\limits_{1-1/n}^{1} tndt = t^2 n/2|_{1-1/n}^{1} = 1 - 1/n$$

$$z(t) = \lim_{n\to\infty} x_n = 1, x < 1$$

$$\|f\| = \sup_{x(t)\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|f(z(t))\|}{\|z(t)\|} = 1$$

29. Линейность:

$f(\alpha x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha \frac{x_k}{k}) = \alpha \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}) = \alpha f(x)$

$f(x+y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k+y_k}{k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k} = f(x) + f(y)$

Непрерывность: Линейный оператор непрерывен $\Leftrightarrow$ он ограничен. Поэтому достаточно доказывать ограниченность оператора.

$\|f(x)\| = |\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{|k|} \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x(t)\|$

Норма: $\|f\| = \sup\limits_{x(t)\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$. Заметим, что из доказательства ограниченности f(x) видно, что $\|f\| \leq 1$. Если мы найдем функцию, в которой значение для $\|f\|$ достигает 1, то норма этого линейного функционала равна 1. Рассмотрим z(t) = (1, 0, 0, . . .)

$\|f\| = \sup\limits_{x(t)\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|f(z(t))\|}{\|z(t)\|} = 1$

30. Линейность:

$f(\alpha x) = \frac{\alpha x(-1)+\alpha x(1)}{2} + \int\limits_{-1}^{1} t\alpha x(t)dt = \alpha(\frac{x(-1)+x(1)}{2} + \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt) = \alpha f(x)$

$f(x+y) = \frac{(x(-1)+y(-1))+(x(1)+y(1))}{2} + \int\limits_{-1}^{1} t(x(t)+y(t))dt = \frac{x(-1)+x(1)}{2} + \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt + \frac{y(-1)+y(1)}{2} + \int\limits_{-1}^{1} ty(t)dt = f(x) + f(y)$

Ограниченность:

$\|f(x)\| = |\frac{x(-1)+x(1)}{2} + \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt| \leq \frac{|x(-1)|+|x(1)|}{2} + \int\limits_{-1}^{1} |t||x(t)|dt \leq \|x(t)\|(1 + \int\limits_{-1}^{1} |t|dt) \leq 2\|x(t)\|$

31. А) $L_2[0,1]$ - пространство вещественных функций, определенных и измеримых на отрезке $[0,1]$, станет гильбертовым, если $\forall x, y \in L_2[0,1]$ положить $(x,y) = \int\limits_{0}^{1} x(t)y(t)dt$. Существование этого интеграла при любых $x(t), y(t)$ из $L_2[0,1]$ вытекает из неравенства Буняковского для интегралов.

В гильбертовом пространстве оператор A^* является сопряженным к оператору A, если $\forall x, y \in L_2[0,1]$ выполнено: $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax(t), y(t)) = \int\limits_{0}^{1}(\int\limits_{0}^{t} x(\tau)d\tau)y(t)dt = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t} x(\tau)y(t)d\tau dt = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{1-t}^{1} x(\tau)y(t)d\tau dt =$$
$$= \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{\tau}^{1} x(\tau)y(t)dtd\tau = \int\limits_{0}^{1} x(\tau)(\int\limits_{\tau}^{1} y(t)dt)d\tau = \int\limits_{0}^{1} x(t)(\int\limits_{t}^{1} y(\tau)d\tau)dt = (x(t), A^*y(t))$$

Таким образом, сопряженный оператор к оператору A имеет вид:

$A^*y(t) = \int\limits_{t}^{1} y(\tau)d\tau.$

B) Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax(t), y(t)) = \int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 tx(s)ds)y(t)dt = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 tx(s)y(t)dsdt = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 sx(t)y(s)dsdt =$$
$$= \int\limits_0^1 x(t) \int\limits_0^1 sy(s)dsdt = (x(t), A^*y(t))$$

Тогда очевидно сопряженный оператор к оператору A имеет вид:

$$A^*y(t) = \int\limits_0^1 sy(s)ds.$$

32. A) В гильбертовом пространстве оператор A^* является сопряженным к оператору A, если $\forall x, y \in l_2$ выполнено: $(Ax, y) = (x, A^*y)$.
Комплексное пространство l_2 становится гильбертовым, если для любых двух его элементов $x = (x_1, x_2, ...)$ и $y = (y_1, y_2, ...)$ положить $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i$.
Сходимость этого ряда для любых x и y из l_2 вытекает из неравенства Буняковского для рядов.
Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i \overline{y}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{(A^*y)}_i = (x, A^*y)$$

Таким образом, сопряженный оператор к оператору A имеет вид:

$$A^*y = (y_1, y_2, ..., y_n, 0, 0, ...).$$

B)Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i \overline{y}_i = \sum_{i=2}^{\infty} x_{i-1} \overline{y}_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{(A^*y)}_i = (x, A^*y)$$

Тогда сопряженный оператор к оператору A имеет вид: $A^*y = (y_2, y_3, ...)$.

33. A) В гильбертовом пространстве оператор A^* является сопряженным к оператору A, если $\forall x, y \in l_2$ выполнено: $(Ax, y) = (x, A^*y)$.
Комплексное пространство l_2 становится гильбертовым, если для любых двух его элементов $x = (x_1, x_2, ...)$ и $y = (y_1, y_2, ...)$ положить $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i$.
Сходимость этого ряда для любых x и y из l_2 вытекает из неравенства Буняковского для рядов.
Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i \overline{y}_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i x_i) \overline{y}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \overline{y}_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i (\lambda_i \overline{y}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{(\lambda_i y_i)} =$$
$$= (x, A^*y)$$

Таким образом, сопряженный оператор к оператору A имеет вид:

$$A^*y = (\lambda_1 y_1, \lambda_2 y_2, ...).$$

B)Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i \overline{y}_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_{i+1} \overline{y}_i = \sum_{i=2}^{\infty} x_i \overline{y}_{i-1} = (x, A^*y)$$

Тогда очевидно сопряженный оператор к оператору A имеет вид:

$$A^*y = (0, y_1, y_2, ...).$$

34. A) Ответ: нет.

В силу линейности A и компактности любого подмножества компакта достаточно проверить, является ли образ замкнутого единичного шара из пространства $C[0,1]$ при отображении A равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным множеством функций из $C[0,1]$. Это следует из теоремы Арцела, утверждающей, что из равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной последовательности функций из $C[a,b], a, b \in R$, и только из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся на $[a,b]$ равномерно, т.е. по норме $C[a,b]$.
Рассмотрим функцию

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2} & , \quad t \in (0,1], \\ 0 & , \quad t = 0. \end{cases}$$

$x(t) \in C[0,1]$, т.к. $|x(t)| \leq \sqrt{t}, t \in [0,1]$ и поэтому $\lim\limits_{t\to+0} x(t) = 0 = x(0)$.
Тогда

$$Ax(t) = t^{\frac{3}{2}} \sin\frac{1}{t^2},$$

$$\frac{d}{dt}(Ax(t)) = \frac{3}{2}\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2} + t^{\frac{3}{2}}\cos\frac{1}{t^2}\left(-\frac{2}{t^3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{t^2}, t \in (0,1].$$

$\frac{d}{dt}(Ax(t))$, очевидно, не является ограниченной на $(0,1]$ функцией $\Rightarrow Ax(t)$ не равномерно непрерывна на $[0,1] \Rightarrow$ шар, содержащий в себе $x(t)$, не будет отображен в равностепенно непрерывное множество, следовательно, A не является компактным оператором.

B) Ответ: да.

Компактность оператора A вытекает из следующего полезного утверждения:
Если функция $K(s,t)$ ограничена на квадрате $a \leq s \leq b, a \leq t \leq b$ и все ее точки разрыва лежат на конечном числе кривых

$$t = \varphi_k(s), k = 1, ..., n,$$

где φ_k - непрерывные функции, то формула

$$Ax = y(s) = \int\limits_a^b K(s,t)dt$$

определяет в пространстве $C[a,b]$ компактный (вполне непрерывный) оператор.
Доказательство этого утверждения приведено на стр. $275 - 276$ учебника А.Н.Колмогорова и С.В.Фомина "Элементы теории функций и функционального анализа".
В нашем случае $K(s,\tau) \equiv 1 \Rightarrow A$ - вполне непрерывный оператор.

C) Ответ: да.

Пусть $x(t) \in \overline{S_1(0)} \subset C[0,1]$. Тогда $|Ax(t)| = |x(0) + tx(1)| \leq 2, \forall t \in [0,1] \Rightarrow$ $A(\overline{S_1(0)})$ - равномерно ограниченное множество функций.

$\forall x(t)$ $Ax(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,1] \Rightarrow$ равностепенная непрерывность $\{Ax(t)\}$ равносильна равномерной ограниченности $\left\{\frac{d}{dt}(Ax(t))\right\}$. $\frac{d}{dt}(Ax(t)) = x(1)$, а $|x(1)| \leq 1 \Rightarrow A(\overline{S_1(0)})$ - равностепенно непрерывное множество. Следовательно, оператор A является вполне непрерывным.

D) Ответ: да.

Доказательство вполне непрерывности A сводится к применению утверждения, приведенного в решении пункта B).

E) Ответ: нет.

Пусть $x(t) = \sqrt{t}\sin\frac{1}{t}, t \in [0,1]$. Очевидно, $x(t) \in C[0,1]$.

$$Ax(t) = t\sin\frac{1}{t^2},$$
$$\frac{d}{dt}(Ax(t)) = \sin\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^2}\cos\frac{1}{t^2}, t \in (0,1].$$

$\frac{d}{dt}(Ax(t))$, очевидно, не является ограниченной на $(0,1] \Rightarrow Ax(t)$ не равномерно непрерывна на $[0,1] \Rightarrow$ шар, содержащий в себе $x(t)$, не будет отображен в равностепенно непрерывное множество, следовательно, A не является компактным оператором.

35. Ответ: нет. Пусть $x(t) \in C[-1,1]$ - четная функция. Тогда $Ax(t) \equiv x(t)$. Возьмем $x(t) = |t|\sin\frac{1}{t^2}$, тогда, как рассмотрено ранее, $Ax(t)$ имеет неограниченную производную на множестве $[-1,0)\cup(0,1] \Rightarrow$ оператор A не является вполне непрерывным.

36. Докажем, что искомым условием на функцию $\varphi(t)$ является условие $\varphi(t) \equiv 0, t \in [0,1]$. Пусть это не так, т.е. $\exists t_0 \in [0,1] : \varphi(t_0) \neq 0$. Тогда в силу свойств непрерывных функций $\exists \delta > 0 : \varphi(t) \neq 0, \forall t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$. Не ограничивая общности, будем полагать, что $\varphi(t) \geq 0$ всюду в окрестности точки t_0 (случай $\varphi(t) \leq 0$ рассматривается аналогично). Тогда рассмотрим функцию
$$x_\delta(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \in [0, t_0-\delta], \\ \frac{t-t_0+\delta}{2\delta} & , \quad t \in (t_0-\delta, t_0+\delta), \\ 1 & , \quad t \in [t_0+\delta, 1]. \end{cases}$$
Видно, что $\forall \delta \in (0,\delta_0)$ $x_\delta \in \overline{S_1(0)} \subset C[0,1]$. Имеем

$|Ax_\delta(t_0+\delta) - Ax_\delta(t_0-\delta)| = \varphi(t_0+\delta) \geq C > 0$, где C - константа, $\forall \delta \in [0,\delta_0)$, т.к. $\varphi(t) \in C(t_0)$.

Итак, $\forall \delta \in (0,\delta_0)$ $\exists x_\delta(t) \in C[0,1] : |Ax_\delta(t_0+\delta) - Ax_\delta(t_0-\delta)| \geq C > 0 \Rightarrow$ образ замкнутого единичного шара из пространства $C[0,1]$ при отображении A не есть равностепенно непрерывное множество функций $\Rightarrow A$ не является вполне непрерывным оператором.
Мы пришли к противоречию $\Rightarrow \varphi(t) \equiv 0, t \in [0,1]$.

37. A) Ответ: нет.

Рассмотрим последовательность $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset S_1(0) \subset C^1[0,1], x_n(t) = \frac{\sin tn}{2n}$; $Ax_n(t) = \frac{\cos tn}{2}$; $\frac{d}{dt}(Ax_n(t)) = -\frac{n \sin tn}{2}$, т.е. $\frac{d}{dt}(Ax_n(t))$ есть неограниченная функциональная последовательность при $n \to \infty \Rightarrow$ образ замкнутого единичного шара из пространства $C[0,1]$ при отображении A не есть равностепенно непрерывное множество функций $\Rightarrow$ A не является вполне непрерывным оператором.

B) Ответ: нет.

Рассмотрим последовательность элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{S_1(0)} \subset C^2[0,1], x_n(t) = \frac{\cos nt}{3n^2}, t \in [0,1]$. Тогда $Ax_n(t) = -\frac{\sin nt}{3n}$, $\frac{d}{dt}(Ax_n(t)) = -\frac{\cos nt}{3}$. Докажем, что из $\{Ax_n(t)\}$ нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся по норме пространства $C^1[0,1]$. Пусть это не так и мы выделили такую подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$. $y_{n_k} \to y \in C^1[0,1]$ по норме пространства $C^1[0,1], k \to \infty \Leftrightarrow \max\limits_{t\in[0,1]} |y_{n_k}(t) - y(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |y'_{n_k}(t) - y'(t)| \to 0, k \to \infty \Rightarrow y'_{n_k}(t) y'(t)$ на отрезке $[0,1]$. Но $y'_{n_k}(t) = -\frac{\cos n_k t}{3}$, а эта последовательность функций не является равностепенно непрерывной на $[0,1]$ (т.к. последовательность производных не является равномерно ограниченной), следовательно, по теореме Арцела $\{y'_{n_k}(t)\}$ не может сходиться равномерно на отрезке $[0,1]$. Мы пришли к противоречию $\Rightarrow$ из $Ax_n(t)$ нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся по норме пространства $C^1[0,1] \Rightarrow$ оператор A не есть вполне непрерывен.

C) Ответ: да. Рассмотрим образ F множества $\overline{S_1(0)} \subset C^2[0,1]$ при отображении A. В пространстве $C^2[0,1]$ $\overline{S_1(0)} = \{x(t) \in C^2[0,1] : \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x''(t)| \leq 1\}$, следовательно, если $x \in \overline{S_1(0)} \subset C^2[0,1]$, то $\max\limits_{t\in[0,1]} |Ax(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |\frac{d}{dt}(Ax(t))| \leq 1 \Rightarrow F$ является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным (в силу равномерной ограниченности множества производных) $\Rightarrow$ согласно теореме Арцела F компактно $\Rightarrow$ оператор A является вполне непрерывным.

38. Критерий компактности в l_p: Для компактности замкнутого множества $K \subset l_p$ необходимо и достаточно, чтобы множество K было ограничено и чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N : \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \varepsilon^p, \forall n \geq n_0, \forall x = \{\xi_1, \xi_2, ...\} \in K$.

A) Ответ: оператор не является вполне непрерывным.

Рассмотрим вновь образ F замкнутого единичного шара из l_p $\overline{S_1(0)}$. Очевидно, что

$$x_n = (x_n^1, x_n^2, ...) : x_n^n = 1, x_n^k = 0, \forall k \neq n$$

принадлежит $\overline{S_1(0)}, \forall n \in N$.
Следовательно,

$$Ax_n = (0, x_n^1, x_n^2, ...) : x_n^n = 1, x_n^k = 0, \forall k \neq n$$

принадлежит $F, \forall n \in N$, откуда очевидно следует невыполнение последнего условия критерия компактности множества в l_p. В самом деле, $\forall n_0 \in N$ $\exists n \geq n_0, \exists y_n = Ax_n \in F : \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} y_k^2 = \sum\limits_{k=n}^{\infty} x_k^2 = 1 \geq \varepsilon^2$ при $\forall \varepsilon < 1$. Итак, оператор A не является вполне непрерывным.

B) Ответ: оператор является вполне непрерывным.

Для доказательства этого покажем, что образ F закнутого единичного шара из l_2 является компактным множеством, для чего воспользуемся критерием компактности множества в l_p. Ограниченность F совершенно очевидна, т.к. $\forall y = Ax \in F$ имеем

$$\|y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (y^n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)^2 \leq 1.$$

Ограниченность F доказана. Чтобы доказать его замкнутость, докажем, что A - непрерывный оператор, тогда, в силу замкнутости $\overline{S_1(0)}$ получим замкнутость F.

$$\forall x_1, x_2 \in l_2 \ \|Ax_1 - Ax_2\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_1^k - x_2^k)^2}{k^2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (x_1^k - x_2^k)^2 = \|x_1 - x_2\|^2.$$

Следовательно, оператор A является непрерывным. Третье условие критерия компактности множества в l_p проверяется следующим образом:

$$\sum_{k=n}^{\infty} ((A_x)_k)^2 = \sum_{k=n}^{\infty} ((A_x)_k)^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{x_k}{k^2}\right)^2 \leq \{x \in \overline{S_1(0)}\} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$$

при любом наперед заданном $\varepsilon > 0$ и любом $n \geq n_0 = n_0(\varepsilon)$.

C) Ответ: оператор является вполне непрерывным. Доказательство этого факта проводится совершенно аналогично доказательству предыдущего пункта.

39. В гильбертовом пространстве оператор A является самосопряженным, если $\forall x, y \in l_2$ выполнено: $(Ax, y) = (x, Ay)$.
Действительное пространство l_2 становится гильбертовым, если для любых двух его элементов $x = (x_1, x_2, ...)$ и $y = (y_1, y_2, ...)$ положить $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i$.
Сходимость этого ряда для любых x и y из l_2 вытекает из неравенства Буняковского для рядов.
Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i y_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i x_i) y_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i y_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i (\lambda_i y_i) = (x, Ay)$$

Таким образом, оператор A является самосопряженным.
Условие на последовательность λ_k, при котором A будет неотрицательным, становится очевидным, если рассмотреть скалярное произведение:

$$(Ax, x) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i x_i) x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i {x_i}^2.$$

Отсюда получаем искомое условие:

$$\lambda_k \geq 0 \ \forall k.$$

40. $L_2[0,1]$ - пространство вещественных функций, определенных и измеримых на отрезке $[0,1]$, станет гильбертовым, если $\forall x, y \in L_2[0,1]$ положить $(x,y) = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$. Существование этого интеграла при любых $x(t), y(t)$ из $L_2[0,1]$ вытекает из неравенства Буняковского для интегралов.
В гильбертовом пространстве оператор A является самосопряженным, если $\forall x, y \in L_2[0,1]$ выполнено: $(Ax, y) = (x, Ay)$, и неотрицательным, если $\forall x \in L_2[0,1] : (Ax, x) \geq 0$.
Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax(t), y(t)) = \int\limits_0^1 (tx(t))y(t)dt = \int\limits_0^1 x(t)(ty(t))dt = (x(t), Ay(t))$$

Таким образом, оператор A является самосопряженным.
Далее рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax(t), x(t)) = \int\limits_0^1 (tx(t))x(t)dt = \int\limits_0^1 tx(t)^2 dt \geq 0.$$

41. $L_2[0,1]$ - пространство вещественных функций, определенных и измеримых на отрезке $[0,1]$, станет гильбертовым, если $\forall x, y \in L_2[0,1]$ положить $(x,y) = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$. Существование этого интеграла при любых $x(t), y(t)$ из $L_2[0,1]$ вытекает из неравенства Буняковского для интегралов.
В гильбертовом пространстве оператор A является самосопряженным, если $\forall x, y \in L_2[0,1]$ выполнено: $(Ax, y) = (x, Ay)$, и неотрицательным, если $\forall x \in L_2[0,1] : (Ax, x) \geq 0$.
Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax(t), y(t)) = \int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 e^{s+t} x(s)ds)y(t)dt = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 e^{s+t} x(s)y(t)dsdt =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 e^{s+t} x(t)y(s)dsdt = \int\limits_0^1 x(t)(\int\limits_0^1 e^{s+t} y(s)ds)dt = (x(t), Ay(t)).$$

Таким образом, оператор A является самосопряженным.
Далее рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax(t), x(t)) = \int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 e^{s+t} x(s)ds)x(t)dt = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 e^{s+t} x(s)x(t)dsdt =$$

$$= \int\limits_0^1 e^t x(t)dt \cdot \int\limits_0^1 e^s x(s)ds = (\int\limits_0^1 e^t x(t)dt)^2 \geq 0.$$

42. Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax(t), y(t)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h}[x(t+\tfrac{h}{2}) - x(t-\tfrac{h}{2})]y(t)dt =$$

$= \frac{1}{h}[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t+\frac{h}{2})y(t)dt - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t-\frac{h}{2})y(t)dt] =$

$= \frac{1}{h}[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(s)y(s-\frac{h}{2})ds - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(v)y(v+\frac{h}{2})dv] =$

$= \frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(s)[y(s-\frac{h}{2}) - y(s+\frac{h}{2})]ds =$

$= \frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)[y(t-\frac{h}{2}) - y(t+\frac{h}{2})]dt =$

$= -\frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)[y(t+\frac{h}{2}) - y(t-\frac{h}{2})]dt = (x(t), -Ay(t)).$

43. Поскольку $\exists A^{-1}$ - ограниченный, то
$\forall x, y \in H\ \exists v, w \in H : v = A^{-1}x,\ w = A^{-1}y.$
Тогда
$(A^{-1}x, y) = (v, Aw) = (Av, w) = (x, A^{-1}y).$

44. Предположим, что $\exists x_0 : (A - \lambda I)x_0 = 0$. Тогда $Ax_0 = \lambda x_0$.
Рассмотрим скалярное произведение (Ax, x) и воспользуемся самосопряженностью оператора A:
$(Ax_0, x_0) = \lambda \|x_0\| = (x_0, Ax_0) = \overline{\lambda}\|x_0\|.$
Следовательно предположение верно только при $x_0 = 0$. Отсюда очевидно следует обратимость оператора $(A - \lambda \cdot I)$.

45. В гильбертовом пространстве оператор A является самосопряженным, если $\forall x, y \in l_2$ выполнено: $(Ax, y) = (x, Ay)$.
Действительное пространство l_2 становится гильбертовым, если для любых двух его элементов $x = (x_1, x_2, ...)$ и $y = (y_1, y_2, ...)$ положить $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i$.
Сходимость этого ряда для любых x и y из l_2 вытекает из неравенства Буняковского для рядов.
Рассмотрим скалярное произведение:
$(Ax, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(Ax)_i y_i = \sum\limits_{i=3}^{\infty} x_i y_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i (Ay)_i = (x, Ay).$
Таким образом, оператор A является самосопряженным.
Далее:
$(Ax, x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(Ax)_i x_i = \sum\limits_{i=3}^{\infty} x_i x_i = \sum\limits_{i=3}^{\infty} x_i^2 \geq 0.$
Теперь рассмотрим оператор A^2. Очевидно, $A^2 x = A(Ax) = (0, 0, x_3, x_4, ...) = Ax$. Поскольку A - самосопряженный оператор, получаем, что оператор $\sqrt{A} = (0, 0, x_3, x_4, ...)$.