

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Факультет Вычислительной математики и
кибернетики

Ф.Ф. Дедус, Л.И. Куликова, А.Н. Панкратов, Р.К. Тетуев

Классические ортогональные базисы в задачах аналитического
описания и обработки информационных сигналов

Москва 2004

УДК 517.5 (683.32)

ББК 22.18+32

Рассмотрен практически универсальный метод аналитического описания информационных данных. В предлагаемом учебном пособии по специальным функциям приведены подробные сведения о замечательных аппроксимативных свойствах классических ортогональных полиномов и функций непрерывного и дискретного аргумента, которые на основе метода наименьших квадратов (МНК) позволяют достаточно просто аналитически описывать результаты натурных испытаний, числовых расчетов, данных экспериментов и т.п.

Изучение сравнительных аппроксимативных свойств ортогональных базисов из числа классических вызвано необходимостью получения заданной точности аналитического описания сигналов наиболее коротким отрезком ортогонального ряда. Это позволяет эффективно решать задачи распознавания в широком смысле, а также способствует успешному решению обратных некорректно поставленных задач.

Пособие предназначено для студентов, аспирантов, научных сотрудников и инженеров.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Факультет Вычислительной математики и кибернетики

Ф.Ф. Дедус, Л.И. Куликова, А.Н. Панкратов, Р.К. Тетуев

Классические ортогональные базисы в задачах аналитического
описания и обработки информационных сигналов

Под редакцией Ф.Ф. Дедуса

Учебное пособие
к спецкурсу «Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки
информационных массивов»

Москва 2004

Содержание

| | |
|---|-----|
| Введение | 6 |
| Глава I. Общие сведения | 9 |
| 1.1. Анализ методов и требования к обработке цифровых информационных массивов ... | 9 |
| 1.2. Системы ортогональных многочленов. Аппроксимация | 14 |
| 1.3. Основы обобщенного спектрально-аналитического метода | 23 |
| Глава II. Классические ортогональные полиномы и функции непрерывного аргумента. ... | 30 |
| 2.1. Общие сведения | 30 |
| 2.2. Модификация классических полиномов непрерывного аргумента | 36 |
| 2.3. Полиномы и функции семейства Якоби | 38 |
| 2.3.1. Основные сведения | 38 |
| 2.3.2. Полиномы и функции Якоби | 39 |
| 2.3.3. Полиномы и функции Гегенбауэра или ультрасферические | 42 |
| 2.3.4. Полиномы Чебышёва первого и второго рода | 44 |
| 2.3.5. Классические полиномы Лежандра или сферические | 47 |
| 2.4. Ортогональные полиномы и функции Сонина-Лагерра | 50 |
| 2.5. Полиномы и функции Эрмита | 53 |
| 2.6. Произвольные полиномы и функции непрерывного аргумента из числа классических | 55 |
| 2.7. Вычисление коэффициентов разложения с помощью квадратурных формул | 57 |
| Глава III. Классические ортогональные полиномы и функции дискретного аргумента. | 61 |
| 3.1. Общие сведения. Свойства ортогональности | 61 |
| 3.2. Полиномы Чебышёва дискретного аргумента | 65 |
| 3.3. Полиномы семейства Майкснера | 67 |
| 3.4. Полиномы семейства Кравчука | 71 |
| 3.5. Полиномы семейства Хана | 75 |
| 3.6. Полиномы семейства Шарлье | 79 |
| 3.7. Особенности аналитической аппроксимации информационных массивов ортогональными полиномами и функциями дискретной переменной | 83 |
| Глава IV. Адаптивное аналитическое описание информационных массивов. Получение необходимых оценок и характеристик. Распознавание | 84 |
| 4.1. Факторы, влияющие на сложность структуры аналитического описания данных ... | 84 |
| 4.2. Коэффициент формы и его использование | 88 |
| 4.3. Разработка и применение адаптивных процедур при аналитическом описании данных, обеспечивающих заданную точность описания выражением наименьшей сложности | 91 |
| 4.4. Исследование операции умножения рядов в пространстве коэффициентов разложения | 99 |
| 4.5. Аналитические преобразования, позволяющие получать требуемые оценки и характеристики | 108 |
| 4.6. Аналитическое описание изображений | 112 |
| 4.7. Инвариантные соотношения. Алгоритмы анализа изображений, распознавания образов и сцен | 120 |
| Приложение 1. Модифицированные классические ортогональные базисы | 131 |
| Приложение 2. Преобразования в пространстве коэффициентов разложения (фрагмент таблицы) | 135 |
| Приложение 3. Взвешенные ортогональные полиномы Якоби при $n = 0, 1, 2$ и различных значениях параметров α и β | 136 |
| Приложение 4. Изменение весовых функций Сонина-Лагерра при различных значениях параметра α и масштабного коэффициента m | 139 |
| Список литературы | 140 |

Мы должны знать – мы будем знать.

Д.Гильберт.

Введение

Тенденции к росту объемов информационных массивов и повышению требований к точности и полноте их обработки за минимальное время заставляют разработчиков новых информационных систем наращивать их вычислительные мощности. Непрерывное увеличение быстродействия вычислительных комплексов ведет к росту стоимости обработки информации, далеко не всегда обеспечивая выполнение требуемых условий обработки данных.

Таким образом, в настоящее время остается актуальной задача создания новых методов обработки данных, которые, наряду с обеспечением заданной точности и скорости обработки, не требовали бы обязательного увеличения мощности вычислительных комплексов.

Широкое распространение цифровых вычислительных машин объясняется, главным образом, универсальностью цифровых расчетов и высоким быстродействием современных ЭВМ. Кроме того, наличие сравнительно недорогих персональных ЭВМ различной мощности обусловило превращение цифровых расчетов фактически в единственную вычислительную технологию. В то же время, непрерывное усложнение большинства решаемых задач, необходимость во многих случаях многократной цифровой обработки массивов данных сводит к минимуму достижения по увеличению быстродействия цифровых ЭВМ. С другой стороны, в сложившейся ситуации представляется явно недостаточным использование достижений отраслей чистой математики (анализа, геометрии, алгебры и т.д.) при создании алгоритмического и программного обеспечения. Выполнять же на цифровой технике аналитические преобразования и выводы формул на основе математических закономерностей при определении характеристик сложных объектов различной физической природы весьма затруднительно и неудобно для дальнейшего использования.

В предлагаемом пособии описаны результаты поиска возможных путей совмещения цифровых расчетов с аналитическими преобразованиями и выводами с целью повышения точности и скорости вычислений на ЭВМ. При этом сохраняется наглядность аналитических выводов и возможность на каждом шаге вычислений иметь аналитическое представление вычисляемых характеристик, искомых параметров и оценок.

Успешная реализация комбинированного метода обработки данных непосредственно зависит от формы аналитического описания исходных числовых массивов. Анализ возможных методов получения аналитического описания показал [1-10], что наиболее полно поставленным условиям отвечает метод, основанный на аппроксимации данных отрезками ортогональных рядов с использованием классических ортогональных полиномов и функций непрерывного и дискретного аргументов [7]. Замечательные аппроксимативные свойства ортогональных базисов определяют их привлекательность при решении указанных ранее задач, а использование результатов аппроксимации в разнообразных аналитических преобразованиях и выводах для получения требуемых оценок или характеристик делают классические ортогональные базисы перспективным инструментом в имеющемся множестве методов и подходов аналитического описания цифровых информационных массивов.

Теория классических ортогональных базисов есть обобщение теории рядов Фурье на алгебраические полиномы. Их отличительная особенность состоит, главным образом, в том, что в большинстве формул, задающих конкретные базисы, имеются параметры, изменение которых может заметно менять свойства ортогональных полиномов и весовых функций, образующих конкретный ортогональный базис. Последнее обстоятельство особенно важно в задачах оптимальной аналитической аппроксимации, когда заданная точность должна быть обеспечена наиболее коротким отрезком ортогонального ряда. Применение специальных адаптивных процедур обеспечивает оптимальную (квазиоптимальную) аналитическую аппроксимацию данных на цифровых ЭВМ в автоматическом режиме. Появляется реальная возможность весьма эффективно проводить разнообразные аналитические преобразования и выводы, способствующие получению в аналитической форме необходимых оценок и характеристик.

Наряду с теоретическими основами, в учебном пособии приведены примеры применения обобщенного спектрально-аналитического метода при решении широкого круга прикладных задач, прежде всего задач распознавания образов и анализа изображений. Так как обобщить метод на функции двух переменных оказалось сложно, дальнейшее его развитие для данных проблем шло по пути использования параметрического описания плоских и пространственных изображений. При этом плоские изображения описываются системой из двух уравнений одного переменного, а пространственные конфигурации однозначно определяются системой из трех уравнений одного переменного. При таком подходе требуется векторизация поступающего изображения, т.е. представление его математического описания в параметрической форме в виде системы уравнений одного аргумента. В дальнейшем анализе полностью

применимы алгоритмы и программы, наработанные для одномерных функций одного аргумента. В этом случае признаками объекта распознавания выступают коэффициенты разложения проекций по наиболее подходящему ортонормированному базису из числа классических.

Предлагаемая вычислительная технология обеспечивает высокое быстродействие при решении информационных задач, требуемую точность вычислений и их наглядность при сравнительно небольшой стоимости таких вычислителей за счет распараллеливания операций и высокой унификации блоков, их образующих. Программирование для решения разнообразных задач на универсальных вычислителях будет сведено к минимуму за счет предварительного выполнения аналитических преобразований и выводов в пространстве коэффициентов разложения.

Глава I. Общие сведения

1.1. Анализ методов и требования к обработке цифровых информационных массивов

Развитие современных универсальных ЭВМ подчинено главным образом увеличению скорости выполнения вычислительных операций за счет увеличения тактовой частоты центрального процессора и распараллеливания вычислительных процедур. Такое направление развития вычислительной техники требует высокоразвитой технологической базы, налаженного производственного процесса, а также больших материальных затрат при создании и эксплуатации ЭВМ новых поколений. Однако даже новейшие супер-ЭВМ, вероятнее всего, не внесут принципиальных изменений в процесс цифровой обработки сигналов.

Эффективная обработка поступающей измерительной информации для обеспечения оперативного решения широкого круга прикладных задач будет определяться выполнением следующих основных требований к математическому обеспечению и средствам обработки данных: способность перерабатывать большой объем поступающей информации за минимальное время в условиях жестких ограничений по энергопотреблению, массе и габаритам, обеспечивая при этом высокую производительность вычислительных устройств и требуемую точность вычислений; возможность распараллеливания вычислительных операций для их реализацию на ЭВМ новых поколений; помехоустойчивость используемых алгоритмов. Кроме того, разрабатываемые математические приемы должны обеспечивать эффективность и устойчивость решения некорректно поставленных задач, в том числе в задачах диагностики, анализа изображений и распознавания образов.

Рассмотрим соотношения между числовыми и аналитическими способами обработки данных, исходя из основных требований, предъявляемых к методам обработки информационных массивов. Под информационным (цифровым) массивом будем понимать упорядоченную совокупность цифровых значений конечной размерности, отображающую определенные характеристики или зависимости об изучаемом объекте или явлении. Извлечению полезной информации из поступающих на ЭВМ информационных массивов служат существующие и разрабатываемые вновь методы, способы и алгоритмы обработки данных.

Проведем сравнительный анализ эффективности решения всего комплекса задач существующими способами и возможными формами хранения фактографической информации. Бурное развитие цифровой вычислительной техники в США обусловило вполне удовлетворительное обеспечение потребителей цифровыми ЭВМ и привело к тому, что при проведении научно-исследовательских работ цифровые расчеты стали основным способом решения всевозможных математических задач практически во всех областях науки и техники. Этому также в значительной степени способствовало развитое математическое обеспечение, наличие больших программных комплексов для решения разнообразных задач.

В нашей стране сложились другие условия. Нехватка необходимых вычислительных мощностей, а также сложившиеся традиции русской математической школы привели к тому, что в Советском Союзе и теперь в России основные усилия ученых и специалистов были сосредоточены на использовании аналитических методов при решении задач. На первом этапе уделялось большое внимание наиболее полному математическому описанию исследуемых объектов. Затем проводились аналитические исследования, преобразования и упрощения исходных аналитических соотношений за счет обоснованных допущений для выявления основных свойств изучаемых объектов и явлений в целом. Такой подход обусловил необходимость тщательного выбора математического аппарата при проведении конкретных исследований, аккуратной и тонкой работы с аналитическими соотношениями, продумыванию каждого последующего шага преобразований, чтобы, не нарушая заданных условий, получить ответ, адекватно отображающий изучаемое явление в определенном диапазоне допущений. В результате проделанной аналитической работы, выполняемые исследования по своему научному уровню не только не уступали западным разработкам, но и нередко далеко превосходили их достижения.

В свете сказанного рассмотрим основные достоинства и недостатки, присущие цифровым и аналитическим методам при решении задач с использованием вычислительной техники. При этом будем основываться как на собственном опыте, так и на некоторых выводах, высказанных в работах других авторов (см., например, [10]).

Под аналитическими будем понимать такие решения, в которых искомая функция $F(x)$ выражена через независимые переменные x в виде аналитических зависимостей или формул, бесконечных или конечных рядов или интегралов. Под численными будем понимать решения, получаемые численно после приближенной замены исходных уравнений другими, более простыми. Например, можно выражать производные через конечные разности, а решение дифференциального уравнения описывать решениями разностного уравнения. Вычисление интегралов аппроксимируется различными

формулами суммирования. Результатом указанных процедур является обычно таблица решений при определенных значениях независимой переменной.

Основные свойства аналитических решений. К преимуществам аналитических решений можно отнести следующие: возможность исследования влияния физических параметров, начальных и граничных условий на характер решения; результаты аналитических решений способствуют разработке адекватных математических моделей исследуемых явлений, хорошо приспособлены для решения задач параметрической идентификации и диагностики состояния исследуемых объектов; аналитические решения более информативны, чем таблицы чисел, вычисление решения при любом конкретном значении аргумента x можно сделать как угодно точно; возможность вычисления значения решения в одной точке x , не прибегая к вычислению значений в других точках; возможность определения значения искомого параметра в любой точке, а не только в узлах сетки; устойчивость получаемого результата.

Среди недостатков аналитических решений можно назвать следующие: на практике обычно регистрируемые информационные массивы формируются в виде числовых таблиц, что делает невозможным непосредственное использование аналитических преобразований в задачах обработки данных; наличие трудностей, связанных с автоматизацией получения результата в приемлемой форме.

Основные свойства численных решений. Преимуществами численных решений являются: универсальность, возможность получения результата в тех случаях, когда аналитическое решение невозможно; высокое быстродействие современных цифровых вычислительных машин, особенно при обработке целочисленных данных на ЭВМ. Из недостатков численных решений можно выделить следующие: вычисление значения параметра в точке и невозможность определения характера его изменений в окрестности вычисленного значения; появление в сложных расчетах различного типа счетных неустойчивостей, что резко снижает ценность проводимых вычислений; сложности использования результатов расчета при создании и доводке математических моделей; накопление в расчетах неучитываемых ошибок округления.

В основе описываемой здесь новой информационной технологии лежит принцип реализации комбинированного численно-аналитического метода, позволяющего повысить оперативность и достоверность обработки информационных массивов, а также использовать преимущества, как числовых расчетов, так и аналитических преобразований и выводов. Для включения аналитических преобразований в процесс обработки данных необходимо на первом этапе получать с требуемой точностью аналитическое описание цифровых массивов. Этот этап является весьма важным, так как выполненное

аналитическое описание используется в дальнейшем как исходный материал для анализа. Выбор математического аппарата в значительной степени будет определять эффективность аналитических выводов.

Исходя из имеющегося опыта, можно сформулировать следующие основные требования к аналитическому описанию цифровых информационных массивов: обеспечение заданной точности описания возможно более простым аналитическим выражением; простота реализации на цифровых ЭВМ; возможность выполнения процедур в автоматическом режиме; адаптивность алгоритмов аналитического описания к особенностям каждого сигнала; унифицированность структуры описания независимо от природы и особенностей сигнала; возможность реализации метода в условиях отсутствия априорной информации о сигнале.

Выполнение сформулированных требований при аналитическом описании информационных сообщений, заданных цифровыми массивами или непрерывными кривыми, полученными в эксперименте, позволит в полной мере воспользоваться преимуществами аналитических преобразований при решении задач обработки данных в системах управления, навигации и распознавания образов. Учет вышесказанного приводит к необходимости выбора подходящего метода описания и возможности применения адаптивных процедур для достижения заданной точности наиболее простым аналитическим выражением. Основной теоретической задачей в данном случае является задача приближения (аппроксимации) функций, заданных числовыми массивами или кривыми. Ее решение позволяет исследовать качественные свойства и числовые параметры исследуемых объектов путем аналитического описания соответствующих характеристик и их последующего изучения.

Под аппроксимацией понимают задачу нахождения для функции $f(x)$ более простой приближающей функции $\varphi(x)$ из заданного класса, близкой в определенном смысле к $f(x)$. Теория аппроксимации в современном виде основана П.Л.Чебышевым [11]. В настоящее время развивается теория наилучшего приближения функций алгебраическими или тригонометрическими полиномами. Большой вклад в развитие теории полиномов наилучшего приближения внес С.Н.Бернштейн и его ученики [2,3]. Наряду с теоретическими достижениями в этой области получены и хорошие практические результаты.

В задачах аналитического приближения функций широко применяются и другие подходы, например, интерполяционные формулы, дающие приближенное выражение функции $f(x)$ посредством интерполяционного многочлена $P_n(x)$ (Ньютона, Лагранжа и

др.) степени n . Во второй половине XX-го столетия существенное развитие получило приближение так называемыми сплайн-функциями [1].

Трудности, связанные с использованием рассмотренных методов приближения для аналитического описания значений, полученных в ходе экспериментальных исследований, заключаются в следующем. Измерения всегда производятся с некоторой погрешностью, поэтому для снижения влияния ошибок наблюдения увеличивают их число и соответственно объем получаемых данных [25,26]. Задача оценки неизвестных параметров приводит к принципу наименьших квадратов, состоящем в минимизации

$$\text{функционала } \Phi = \int \left[y(x) - \sum_{i=0}^n a_i x^i \right]^2 dx, \text{ где } y(x) - \text{измеренная зависимость, } \sum_{i=0}^n a_i x^i - \text{ее}$$

полиномиальное приближение, a_i – искомые значения параметров. Однако метод наименьших квадратов для приближения наблюдаемых значений аналитическими выражениями имеет существенный недостаток. Если оказывается, что приближающий многочлен плохо описывает измеренные значения и требуется повысить точность описания, то для вычисления коэффициентов нового описывающего полинома более высокой степени приходится всю процедуру повторять заново. Способ, разработанный П.Л.Чебышевым, существенно упрощает необходимые вычисления при реализации метода наименьших квадратов. Суть этого способа в том, что приближающий многочлен ищется не в виде суммы степеней x , а в виде комбинации многочленов, выбранных специальным образом. Для этого по способу наименьших квадратов [27] необходимо искать минимум функционала

$$\Phi = \int \left[y(x) - \sum_{i=0}^n A_i \varphi_i(x) \right]^2 dx \quad (1.1.1)$$

Можно показать, что вариационная задача минимизации функционала из (1.1.1) приводит к системе уравнений, решение которой дает значения коэффициентов A_i искомого приближающего многочлена

$$y(x) = \sum_{i=0}^n A_i \varphi_i(x) \quad (1.1.2)$$

где $\varphi_i(x)$ - ортогональные многочлены Чебышева, A_i - коэффициенты разложения функции $y(x)$ по ортогональным полиномам Чебышева. Предложенный Чебышевым подход заключается в том, что от приближающего многочлена, в котором методом наименьших квадратов определяются коэффициенты при степенях переменной x , переходят к приближающему многочлену в виде суммы многочленов повышающихся

степеней (1.1.2), в котором коэффициенты при функциях $\varphi_i(x)$ также определяются методом наименьших квадратов. В этом случае добавление новых слагаемых в (1.1.2) для повышения точности описания не влечет изменения уже вычисленных коэффициентов A_i . В предложенной процедуре полиномы $\varphi_i(x)$ являются взаимно ортогональными, а коэффициенты A_i называются коэффициентами разложения функции $y(x)$ по системе ортогональных полиномов $\varphi_i(x)$.

Впервые ортогональные разложения (в частном случае тригонометрических базисов) использовались в работах Гюйгенса, Эйлера и Бернулли. Теория последних, включая вопросы разложения по ним произвольных функций, отвечающих определенным условиям, разработана в трудах Фурье и Вейерштрасса [12]. К настоящему времени разработана теория многих других систем ортогональных многочленов. При этом алгебраические ортогональные многочлены объединяются в две группы: классические ортогональные полиномы непрерывного аргумента и классические ортогональные полиномы дискретного аргумента [4, 13]. Указанные группы базисов объединяются целым рядом общих признаков, которые позволяют удовлетворить сформулированные требования по адаптивной аналитической аппроксимации экспериментальных данных.

Вопросы и упражнения.

- 1) Сформулировать основные свойства и сравнительные характеристики аналитического и цифрового методов при обработке информационных данных.
- 2) Основное отличие способа реализации метода наименьших квадратов (МНК), разработанного П.Л. Чебышевым и традиционного МНК.

1.2. Системы ортогональных многочленов. Аппроксимация.

В соответствии с основными положениями функционального анализа [18] и теории аппроксимации [2,7,19], прежде всего, следует оценивать поступающие информационные сигналы с точки зрения их принадлежности к определенному функциональному пространству. Затем, опираясь на теорию аппроксимации, определять способы аналитического описания исследуемых информационных данных, которые бы максимально способствовали преодолению трудностей, связанных с обработкой информационных массивов и успешному решению задач распознавания в широком смысле.

Будем рассматривать сигналы и процессы как элементы f, g, y, \dots , принадлежащие абстрактному пространству. Одним из основных понятий функционального анализа

является понятие метрического пространства, в котором введено расстояние между элементами.

Метрическим пространством R называется множество любых элементов f, g, y, \dots , в котором определена однозначная неотрицательная действительная функция, называемая

расстоянием между точками (элементами) $\rho(f, g) = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}$ и

удовлетворяющая следующим условиям (аксиомам):

$$\begin{aligned} \rho(f, g) &\geq 0; \rho(f, f) = 0, \text{ и } \rho(f, g) = 0, \text{ тогда и только тогда, когда } f = g; \\ \rho(f, g) &= \rho(g, f) - \text{аксиома симметрии;} \\ \rho(f, y) &\leq \rho(f, g) + \rho(g, y), \text{ } f, y, g \in R - \text{аксиома треугольника.} \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Если в метрических пространствах R дополнительно определены операция сложения и операция умножения элементов множества на число (вещественное или комплексное), то такие метрические пространства называются линейными (или векторными) пространствами L . Элементы линейных пространств иногда называют векторами.

Линейные пространства L называются нормированными пространствами, если в них задана некоторая неотрицательная функция $\|f\|$. $\|f\|$ называется нормой вектора f . Простейшим примером линейного нормированного одномерного пространства L^1 является прямая линия, если для всякого числа $x \in L^1$ положить $\|x\| = |x|$.

Пусть для последовательности точек $\{x_n\}$ прямой выполняется критерий Коши [20].

В этом случае последовательность точек $\{x_n\}$ метрического пространства L^1 называется фундаментальной. Метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу из того же пространства, называется полным. Полные линейные нормированные пространства называются пространствами Банаха или B -пространствами. Важным частным случаем пространства Банаха является гильбертово пространство H , в котором, кроме расстояния между двумя элементами и нормы, определено также так называемое скалярное произведение элементов. Гильбертово функциональное пространства H обладает следующими свойствами: H - комплексное линейное пространство; в пространстве H каждой паре элементов f, g сопоставляется некоторое, в общем случае комплексное число (f, g) , которое называют скалярным произведением элементов f и g , удовлетворяющее следующим условиям:

$$a) (f, g) = \overline{(g, f)}; \tag{1.2.2}$$

$$\text{б) } (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 (f_1, g) + \alpha_2 (f_2, g);$$

в) $(f, f) \geq 0$ и вещественное число;

г) $(f, f) = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$.

Норма элемента f определяется выражением $\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$. Пространство

H полно и бесконечномерно, то есть в нем для любого f можно найти n линейно независимых элементов. Элементы f, g пространства H называются взаимно ортогональными, если $(f, g) = 0$. Рассмотрим в дальнейшем в качестве элементов Гильбертова пространства функции, принадлежащие пространству L^2 . Пространством L^2 называют совокупность всех измеримых функций на интервале (a, b) , вторая степень которых интегрируема в смысле Лебега, то есть их норма определяется равенством

$$\|f\| = \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx},$$
 а сложение и умножение на число понимается в обычном

смысле.

В уточнение понятия измеримая функция входить не будем. Все встречающиеся ниже интегралы, которые понимаются в смысле Лебега, являются сходящимися. Исходя из нужд практических приложений допустимо, если читатель будет думать все время о непрерывных функциях и интегралах Римана.

Функция $f(x)$ называется функцией с интегрируемым квадратом, если

$$\int_a^b f^2(x) dx < \infty \quad (1.2.3)$$

и относится к L^2 .

При $\rho(x) \neq 1$ выражение (1.2.3) имеет вид

$$\int_a^b f^2(x) \rho(x) dx < \infty, \quad (1.2.3')$$

и $f(x)$ относится к L_ρ^2 .

Основными свойствами функций с интегрируемым квадратом являются следующие:

- всякая функция с интегрируемым квадратом есть интегрируемая функция;
- произведение двух функций с интегрируемым квадратом есть интегрируемая функция;
- сумма двух функций из L^2 , также принадлежит L^2 ;
- если α - произвольное число, тогда $\alpha f \in L^2$.

Скалярное произведение функций f и g в пространстве L^2 определяется формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx, \text{ а в пространстве } L^2_\rho \text{ имеет вид } (f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx. \text{ В } L^2$$

выполняются неравенство Коши-Буняковского $(f, g)^2 \leq (f, f)(g, g)$ и неравенство

$$\sqrt{(f+g, f+g)} \leq \sqrt{(f, f)} + \sqrt{(g, g)}.$$

Проблема аппроксимации в гильбертовом пространстве.

Пусть на отрезке (a, b) задана неотрицательная весовая функция $\rho(x)$. Тогда скалярное произведение в L^2 функций $\varphi_i(x)$ будет:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_a^b \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \rho(x) dx, \quad (1.2.4)$$

которое определено для $\varphi_i(x)$, таких, что $\sqrt{\rho(x)} \cdot \varphi_i(x)$ имеет интегрируемый квадрат на (a, b) . Или в более общем виде скалярное произведение в L^2 определяется интегралом Стильтеса:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_a^b \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) d\alpha(x), \quad (1.2.5)$$

где $\alpha(x)$ – неубывающая функция. Если $\alpha(x)$ абсолютно непрерывная функция, то (1.2.5) сводится к (1.2.4), где $\rho(x) = \alpha'(x)$.

Если же $\alpha(x)$ является функцией скачков, то есть если она кусочно-постоянна и имеет скачки величины j_i в точках $x = x_i$, то интеграл (1.2.5) сводится к сумме, которая задает скалярное произведение функций дискретного аргумента:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_i j_i \varphi_1(x_i) \cdot \varphi_2(x_i), \quad (1.2.6)$$

где $j(x_i)$ - функция скачков.

Приведенное определение относится к функциям дискретного аргумента.

Две функции называются ортогональными (взаимоортогональными), если их скалярное произведение равно нулю. Семейство функций называют ортогональной и нормированной системой (базисом) на отрезке (a, b) относительно веса $\rho(x)$, если для любых двух различных функций (элементов) этого семейства справедливо равенство:

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x) \rho(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 1, & \text{если } i = j \end{cases}. \quad (1.2.7)$$

Каждую ортогональную систему можно нормировать, если заменить ненормированные функции $\bar{\varphi}_n(x)$ на нормированные $\varphi_n(x)$ по формуле:

$$\varphi_n(x) = (\bar{\varphi}_n(x), \bar{\varphi}_n(x))^{-\frac{1}{2}} \cdot \bar{\varphi}_n(x) = \frac{\bar{\varphi}_n(x)}{\sqrt{\int_a^b \bar{\varphi}_n^2(x)}}. \quad (1.2.8)$$

Заметим, что всякую последовательность линейно независимых функций $\{\psi_n(x)\}$ можно преобразовать линейной комбинацией

$$\varphi_n(x) \equiv \sum_{k=0}^n C_{nk} \psi_k(x) \quad (1.2.9)$$

в систему функций $\{\varphi_n(x)\}$, ортогональных относительно скалярного произведения (1.2.4) или (1.2.5). Определение коэффициентов C_{nk} осуществляется в соответствии с процессом ортогонализации Грама-Шмидта [21], разработанным Й. Грамом (1883) и Э. Шмидтом (1905).

Часто полезно, при рассмотрении некоторой системы функций f_1, f_2, \dots, f_N , определить является ли эта система линейно независимой. Для этой цели построим квадратную матрицу A (матрицу Грама) размерности $N \times N$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}. \quad (1.2.10)$$

где элементы матрицы $a_{ij} = (f_i, f_j)$ - есть попарное скалярное произведение всех элементов системы f_1, f_2, \dots, f_N .

Можно утверждать, что система функций f_1, f_2, \dots, f_N линейно независима тогда и только тогда, когда определитель соответствующей матрицы Грама положительно определен.

То есть, если обозначить через

$$\Gamma(f_1, f_2, \dots, f_N) = \|A\| = \det\|(f_i, f_j)\| \text{ (определитель Грама),}$$

то условие линейной независимости функций f_1, f_2, \dots, f_N тождественно условию

$$\Gamma(f_1, f_2, \dots, f_N) > 0, \quad (1.2.11)$$

т.е. определитель Грама больше нуля.

Для определителя Грама справедливо неравенство:

$$\Gamma(f_1, f_2, \dots, f_N) \leq \Gamma(f_1) \cdot \Gamma(f_2) \cdot \dots \cdot \Gamma(f_N) \equiv (f_1, f_1)(f_2, f_2) \dots (f_N, f_N), \quad (1.2.12)$$

где $\Gamma(f_i) = \|f_i\|^2$.

Причем, если $\Gamma(f_1, f_2, \dots, f_N) \neq 0$, то точное равенство в (1.2.12) возможно тогда и только тогда, когда функции f_1, f_2, \dots, f_N попарно ортогональны. Действительно, тогда

$$\|A\| = \det \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{NN} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{NN} \equiv (f_1, f_1)(f_2, f_2)\dots(f_N, f_N). \quad (1.2.13)$$

Вообще, для векторного пространства L определитель Грама равен квадрату объема N -мерного параллелепипеда, построенного на векторах $f_1, f_2, \dots, f_N \in L$.

Рассмотрим пример. Построим матрицу Грама для некоторой пары функций $y_0 = 1 + 2x$ и $y_1 = 2 + 2x$ в пространстве $L^2(0,1)$ и найдем её определитель:

$$(y_0, y_0) = \int_0^1 (1 + 2x)(1 + 2x)dx = \frac{13}{3};$$

$$(y_1, y_1) = \int_0^1 (2 + 2x)(2 + 2x)dx = \frac{28}{3}; \quad (1.2.14)$$

$$(y_0, y_1) = (y_1, y_0) = \int_0^1 (1 + 2x)(2 + 2x)dx = \frac{19}{3}.$$

$$\Gamma(y_0, y_1) = \begin{vmatrix} (y_0, y_0) & (y_0, y_1) \\ (y_1, y_0) & (y_1, y_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{13}{3} & \frac{19}{3} \\ \frac{19}{3} & \frac{28}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(13 \cdot 28 - 19 \cdot 19) = \frac{1}{9}(364 - 361) = \frac{1}{3}. \quad (1.2.15)$$

Исходя из положительного значения определителя матрицы Грама

$$\Gamma(y_0, y_1) = \frac{1}{3} > 0, \quad (1.2.16)$$

можно утверждать, что данные функции y_0 и y_1 линейно независимы.

Определим линейную независимость некоторой системы функций $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{N-1} \in L$, используя линейную комбинацию

$$\varphi_n(x) \equiv \sum_{k=0}^n C_{nk} \psi_k(x). \quad (1.2.17)$$

Построим систему функций $\tilde{\psi}_0, \tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_{N-1} \in L$, попарно ортогональных относительно скалярного произведения (1.2.4) или (1.2.5).

Для однозначного нахождения значений C_{nk} необходимо потребовать выполнения дополнительного условия, например, ортонормированности $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}$ или выбирать произвольно величину одного из n -ых коэффициентов. Для удобства будем выражать

новый элемент $\varphi_n(x)$ индуктивно через уже построенные элементы ортогональной системы младших порядков $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ и элемент прежней системы $\psi_n(x)$ в виде:

$$\varphi_n(x) \equiv \psi_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk} \varphi_k(x), \quad (1.2.18)$$

имея в виду, что $\varphi_0 = \psi_0$.

Затем получим $\varphi_1(x) \equiv \psi_1(x) + \alpha_{10} \varphi_0(x)$.

Тогда из условия ортогональности пары φ_0 и $\varphi_1(x)$ получим равенство:

$$(\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_0, \psi_1 + \alpha_{10} \varphi_0) = (\varphi_0, \psi_1) + \alpha_{10} (\varphi_0, \varphi_0) = 0, \quad (1.2.19)$$

откуда легко выражается $\alpha_{10} = -\frac{(\varphi_0, \psi_1)}{(\varphi_0, \varphi_0)}$.

Далее построение ведется индуктивно, при этом значения коэффициентов α_{nk} для (1.2.18) будут выражаться в виде:

$$\alpha_{nk} = -\frac{(\varphi_k, \psi_n)}{(\varphi_k, \varphi_k)}. \quad (1.2.20)$$

Продемонстрируем ортогонализацию Грама-Шмидта на следующем примере. Ранее было показано линейная независимость функций $y_0 = 1 + 2x$ и $y_1 = 2 + 2x$. Определим скалярное произведение функций в $L^2_\rho(0,1)$ с весом $\rho(x) \equiv 1$:

$$(y_i, y_j) = \int_0^1 y_i(x) y_j(x) dx. \quad (1.2.21)$$

Первый элемент выстраиваемой ортогональной системы, согласно методу, определим равным y_0 :

$$\tilde{y}_0 = y_0 = 1 + 2x. \quad (1.2.22)$$

Найдем

$$\alpha_{10} = -\frac{(\tilde{y}_0, y_1)}{(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)} = -\frac{\int_0^1 (1+2x)(2+2x) dx}{\int_0^1 (1+2x)(1+2x) dx} = -\frac{\left(\frac{19}{3}\right)}{\left(\frac{13}{3}\right)} = -\frac{19}{13}.$$

Тогда

$$\tilde{y}_1 = y_1 + \alpha_{10} \tilde{y}_0 = 2 + 2x - \frac{19}{13}(1 + 2x) = \frac{7}{13} - \frac{12}{13}x.$$

Проверим полученную пару функций на ортогональность в $L^2(0,1)$:

$$\int_0^1 \bar{y}_0 \bar{y}_1 dx = \int_0^1 (1+2x) \left(\frac{7}{13} - \frac{12}{13}x \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{7}{13} + \frac{2x}{13} - \frac{24}{13}x^2 \right) dx = \left(\frac{7x}{13} + \frac{x^2}{13} - \frac{8x^3}{13} \right) \Big|_0^1 = \frac{7+1-8}{13} = 0.$$

Итак, найденные функции взаимно ортогональны.

В различных приложениях часто для приближенного представления некоторой функции $f(x)$ используется система линейно независимых элементарных функций $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$.

Нахождение коэффициентов C_n , при которых линейная комбинация этих функций

$$f(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n \quad (1.2.23)$$

наименее уклоняется от функции $f(x)$ (в среднеквадратичном смысле) является сущностью метода наименьших квадратов. Однако, можно утверждать [27], что нахождение таких коэффициентов на практике зачастую сопряжено с серьезными вычислительными трудностями.

Теперь мы знаем, что любую систему линейно независимых функций, при определенном интервале и скалярном произведении, можно преобразовать по формулам (1.2.18), (1.2.20) и (1.2.8) в систему функций, ортонормированных на данном интервале. Это оказывается весьма полезным, т.к. при этом аппроксимация функции $f(x)$ в виде

$$f(x) \approx C_0\psi_0(x) + C_1\psi_1(x) + \dots + C_n\psi_n(x) \quad (1.2.24)$$

сводится лишь к вычислению скалярных произведений

$$C_n = (f, \psi_n). \quad (1.2.25)$$

Если определить скалярное произведение (1.2.4) с весовой функцией $\rho(x) \equiv 1$ на интервале $[-1,1]$, то получим из системы $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$ систему ортогональных

полиномов Лежандра $P_n(x)$, а с весовой функцией $\rho(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на том же интервале

получим ортогональные полиномы Чебышева $T_n(x)$. Из этой же нелинейной системы,

рассматривая ее уже на интервале $[0, +\infty)$ с весовой функцией $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ можно

получить систему ортогональных полиномов Сонина-Лагерра $L_n^\alpha(x)$. Разнообразие

получаемых ортогональных систем при простоте оперирования с ними является весьма существенным преимуществом рассмотренного приема.

Для того чтобы положительно разрешить вопрос о возможности представления любого элемента f Гильбертова пространства H через линейную комбинацию некоторого ортогонального базиса $\{\psi_i\}$, заданного в том же пространстве, необходимо проверить выполнение для базиса $\{\psi_i\}$ свойства полноты в этом пространстве. Это свойство является весьма существенным, т.к. мы вполне можем иметь базис $\{\psi_i\}$ с

бесконечным количеством элементов ψ_i , удовлетворяющих условию ортогональности и нормированности в пространстве H , но при этом найдется такой элемент $f \in H$, который не будет представим в виде линейной комбинации (1.2.24).

Существует несколько эквивалентных определений полноты ортогональной системы $\{\psi_i\}$ в гильбертовом пространстве H . С ними можно познакомиться в работах [10].

Будем рассматривать приближение функций $f(x)$ из L^2 с помощью линейных комбинаций ортонормированных функций:

$$A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \dots + A_n\varphi_n(x) + \dots \quad (1.2.26)$$

Меру точности приближения используем в виде

$$\int_a^b \rho(x) \left[f(x) - \sum_{n=0}^N A_n \varphi_n(x) \right]^2 dx = \int_a^b \rho(x) [f(x) - A_0\varphi_0(x) - A_1\varphi_1(x) - \dots - A_n\varphi_n(x)]^2 dx. \quad (1.2.27)$$

Можно показать [23], что в этом случае наилучшим возможным выбором коэффициентов разложения A_n являются коэффициенты Фурье

$$A_n = (f(x), \varphi_n(x)) = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) \rho(x) dx. \quad (1.2.28)$$

Может случиться, что для любой функции $f(x)$ из L^2 , квадрат которой интегрируем относительно веса $\rho(x)$, справедливо соотношение замкнутости Ляпунова-Стеклова:

$$\int_a^b [f(x)]^2 \rho(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2. \quad (1.2.29)$$

Тогда ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}$ называют замкнутой в L^2 или полной [20], а равенство (1.2.29) называют равенством Ляпунова-Стеклова (1896г). Для тригонометрической ортонормированной системы функций подобное равенство доказал в 1805 году Парсеваль:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2). \quad (1.2.30)$$

При выполнении равенства (1.2.29) или (1.2.30), очевидно,

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=0}^N A_n \varphi_n(x) \right]^2 \rho(x) dx \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (1.2.31)$$

то есть частичные суммы ряда Фурье (1.2.27) сходятся в среднем к $f(x)$.

Таким образом, любая система ортогональных многочленов на конечном отрезке замкнута. О замкнутости ортогональных многочленов на бесконечном или полубесконечном промежутках смотри работу [22].

Вопросы и упражнения.

- 1) Определение метрического пространства R , основные аксиомы.
- 2) Определение и основные свойства (аксиомы) Гильбертова функционального пространства. Норма элемента в Гильбертовом функциональном пространстве.
- 3) Дать определение функции, относящейся
 - а) к функциям с интегрируемым квадратом;
 - б) к функциям с интегрируемым квадратом с весом.
- 4) Определить являются ли линейно независимыми функции:
 - а) $y_0 = \sin x$, $y_1 = \cos x$ на интервале $(0, 2\pi)$;
 - б) $y_0 = 1$, $y_1 = e^{-x}$ на интервале $(0, \infty)$;
 - в) $y_0 = 1 + 2x$, $y_1 = 2 + 4x$ на интервале $(0, 1)$;
 - г) $y_0 = 1 + 2x$, $y_1 = 2 + 3x$, $y_2 = 2 + x^2$ на интервале $(0, 1)$.
- 5) Построить ортогональную систему для линейно независимых функций из упражнения 4 на том же интервале с весом $\rho(x) \equiv 1$.

1.3. Основы обобщенного спектрально-аналитического метода

Проведенные исследования по выбору эффективного математического аппарата для решения проблем управления динамическими объектами, решения некорректно поставленных задач (при параметрической идентификации и диагностике исследуемых систем), а также при разработке математических подходов в задачах анализа изображений, распознавания образов показали [4,14-17], что наиболее полно удовлетворить сформулированные требования к аналитическому описанию сигналов можно на основе разложения этих сигналов в ортогональные ряды с использованием всего многообразия классических ортогональных полиномов и функций. Представление исследуемых сигналов в виде отрезков ортогональных рядов характерно тем, что структура таких описаний остается всегда неизменной, а необходимая информация о сигналах содержится в коэффициентах разложения, которые, в свою очередь, являются линейно независимыми функционалами. Отмеченные обстоятельства позволяют

разрабатывать процедуры полной обработки сигналов в пространстве коэффициентов разложения в "сжатом" виде, что будет способствовать существенному повышению точности получаемых оценок и уменьшению объема вычислительных операций.

В соответствии с традиционной технологией обработки информационных сообщений, представляемых обычно в виде непрерывных сигналов либо сигналов дискретного аргумента, ставится задача о наиболее полном извлечении полезной информации в процессе обработки данных. Однако решению поставленной задачи препятствуют следующие основные обстоятельства. Обработка непрерывных сигналов с помощью аналоговых вычислительных устройств даже при отсутствии помех не обеспечивает получение искомым оценок с требуемой точностью, так как в большинстве случаев оценить возникающие при этом погрешности не представляется возможным. Этому препятствует нестабильная, а часто и низкая точность работы аналоговых вычислительных элементов и схем. Если же на аналоговый сигнал наложены случайные помехи, то трудности извлечения информации в процессе обработки существенно возрастают из-за необходимости использования дополнительных аналоговых фильтрующих элементов.

Применение цифровой вычислительной техники исключает указанные недостатки и позволяет вести обработку с требуемой точностью. Однако в этом случае необходимо предварительно выполнить дискретизацию (квантование) непрерывного сигнала, заменив его дискретными отсчетами, которые соответствуют значениям функции в точках опроса и не дают текущих значений сигнала в промежутках между отсчетами.

Вообще, частота дискретизации непрерывного сигнала определяется теоремой отсчетов [18], устанавливающей условия, при которых непрерывный сигнал $x(t)$, дискретизированный по пространственной или временной переменной, может быть восстановлен по полученным отсчетам без потери информации. В соответствии с указанной теоремой при равномерных отсчетах с интервалом T_g (частота отсчетов $F_g = 1/T_g$) дискретизация сигнала будет происходить без потери информации, если $F_g \geq 2F_c$, где F_c – наивысшая частота ограниченного спектра сигнала $x(t)$. Теорему отсчетов в литературе называют теоремой Уиттекера – Котельникова – Шеннона [18] в честь ученых, независимо друг от друга сформулировавших и доказавших ее. В случае если на полезный сигнал наложена помеха, то это условие нарушается. При этом частота дискретизации может быть увеличена для того, чтобы имелась возможность уверенно зафиксировать полезный сигнал и сгладить наложенную на него помеху.

В случае, когда на основе полученной информации необходимо решать некорректно поставленную обратную задачу, увеличение частоты опроса не будет способствовать

повышению точности вычислений: дальнейшее увеличение частоты дискретизации вызовет падение точности вычислений за счет роста неучитываемых погрешностей при округлении. Возникающее противоречие приводит к существенным трудностям при обработке сигналов и, как правило, не имеет общего решения. Указанная ситуация послужила еще одной серьезной причиной перехода к спектральным методам обработки сигналов. При этом поступающие сигналы первоначально раскладываются в ортогональные ряды с заданной точностью. Затем получаемые аналитические описания сигналов преобразуются в результате аналитических выводов в различные формулы, по которым определяются искомые оценки и характеристики. Используемые адаптивные процедуры в процессе аналитического описания сигналов обеспечивают заданную точность описания короткими отрезками ортогональных рядов. При этом количество коэффициентов разложения n , которое необходимо запоминать для воспроизведения каждого сигнала, обычно существенно меньше числа дискретных отсчетов K , из которых сформирован сигнал ($n < K$). Это обстоятельство обеспечивает эффективное "сжатие" объема представления сигналов по сравнению с исходным объемом дискретного массива. Наличие операции интегрирования при вычислении коэффициентов разложения в значительной степени снижает влияние помех на процессе дальнейшей обработки сигналов.

С точки зрения полноты передаваемого информационного сообщения имеется принципиальное различие между K дискретными отсчетами и n коэффициентами разложения. Каждый отсчет характеризует мгновенное значение сигнала в точке отсчета x_i , а коэффициент разложения A_j пропорционален величине проекции сигнала $x(t)$ на j -ю известную ортогональную функцию выбранного базиса на всем промежутке задания (существования) данного сигнала $[0, T]$. При этом, чем больше по абсолютной величине данный коэффициент разложения A_j , тем ближе анализируемый сигнал на промежутке совпадает с j -ой ортогональной функцией.

С другой стороны, ортогональное разложение $x(t)$ по полной системе ортогональных функций принятого базиса является "жестким" (ранее вычисленные коэффициенты не изменяются при вычислении последующих коэффициентов), следовательно, можно всегда обеспечить заданную точность разложения в среднеквадратичном или равномерном смысле, контролировать которую достаточно просто на основании равенства Ляпунова-Стеклова (Парсеваля) [19]. Не умаляя общности, последнее для замкнутых (полных) ортогональных систем с весом $\rho(t) \equiv 1$ можно записать в виде

$$B_x = \int_a^b x^2(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2, \quad (1.3.1)$$

или переписать в следующей форме:

$$\gamma_{\infty} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_n^2}{B_x} = 1, \quad (1.3.2)$$

где γ_{∞} – относительная интегральная квадратичная точность приближения.

При $N = \infty$, в пределе, интеграл от $x^2(t)$ будет точно равен величине $\sum_{n=0}^{\infty} A_n^2$. В реальных условиях, при $n = N < \infty$, будет $\gamma_N < \gamma_{\infty}$ и $\gamma_N < 1$. Очевидно, поэтому, при $N = 0$ точность приближения $\gamma_0 = 0$ (аппроксимация отсутствует), при $N = \infty$ $\gamma_{\infty} = 1$ (аппроксимация $x(t)$ выполнена точно, без ошибки).

Перепишем выражение (1.3.2) в другой форме:

$$\gamma_N = \frac{A_0^2}{B_x} + \frac{A_1^2}{B_x} + \dots + \frac{A_N^2}{B_x}. \quad (1.3.3)$$

В равенстве (1.3.3) каждое слагаемое характеризует относительную долю n -ой проекции в формировании сигнала (переданного сообщения), то есть содержащуюся в слагаемом часть информационного сообщения.

Таким образом, при разложении в ортогональный ряд происходит ортогональное проектирование сигналов на известные функции из выбранного базиса. Полученные при этом значения коэффициентов разложения указывают на степень совпадения сигналов с известными ортогональными функциями на рассматриваемых промежутках. Точность аппроксимации и вклад каждой проекции в формирование сигнала можно оценить с помощью равенств (1.3.1) и (1.3.2). Следовательно, информационная емкость каждого коэффициента разложения пропорциональна его относительной величине в соответствии с (1.3.3) и является интегральной характеристикой.

Использование коэффициентов разложения в качестве исходных величин для решения обратных некорректно поставленных задач, в частности, параметрической идентификации и диагностики, при соблюдении оптимальных условий аналитической аппроксимации повышает точность нахождения оценок исходных параметров и не требует дополнительной регуляризации. Кроме того, сохраняется устойчивость решений в условиях наложения помех на полезный сигнал за счет операции интегрирования при вычислении коэффициентов разложения. Многочисленные примеры решения практических задач по параметрической идентификации, технической диагностике

подтверждают высокую эффективность обработки сигналов в пространстве коэффициентов разложения.

Таким образом, обобщенный спектрально-аналитический метод (ОСАМ) обработки информационных массивов является, на наш взгляд, одним из перспективных комбинированных численно-аналитических методов, который позволяет в процессе обработки разумно сочетать сильные стороны, как цифровых расчетов, так и аналитических выводов. Структурная схема обобщенного спектрально-аналитического метода представлена на стр. 28. Подробное описание ее работы будет изложено в дальнейшем.

Цель этапа цифровой обработки на ЭВМ состоит в получении аналитического описания поступающих сигналов с требуемой точностью.

Для этого, на основании предварительно проведенного всестороннего анализа существующих способов аппроксимации, было решено применять аналитическое описание сигналов путем разложения в ортогональные ряды на основе широкого использования классических ортогональных полиномов и функций непрерывного и дискретного аргументов.

Адаптивные процедуры, используемые при этом, обеспечивают вычисление такого количества коэффициентов разложения (длину отрезка ортогонального ряда), которое удовлетворяет заданную точность аналитического описания отрезком минимальной длины.

Сущность этапа аналитических преобразований состоит в том, что структура аналитического описания сигналов отрезками ортогональных рядов всегда известна. Поэтому обычно до начала обработки данных на ЭВМ следует выполнить в общем виде необходимые аналитические преобразования для вывода соответствующих формул, оценок, характеристик и т.д. Полученные аналитические соотношения в общем виде, перед началом процесса обработки данных вводятся программно или “записываются” в ее запоминающее устройство.

Вычисленные коэффициенты разложения в процессе обработки сигналов направляются в соответствующие ячейки, памяти в результате формируются конкретные оценки и характеристики в аналитической форме и выдаются на печать.

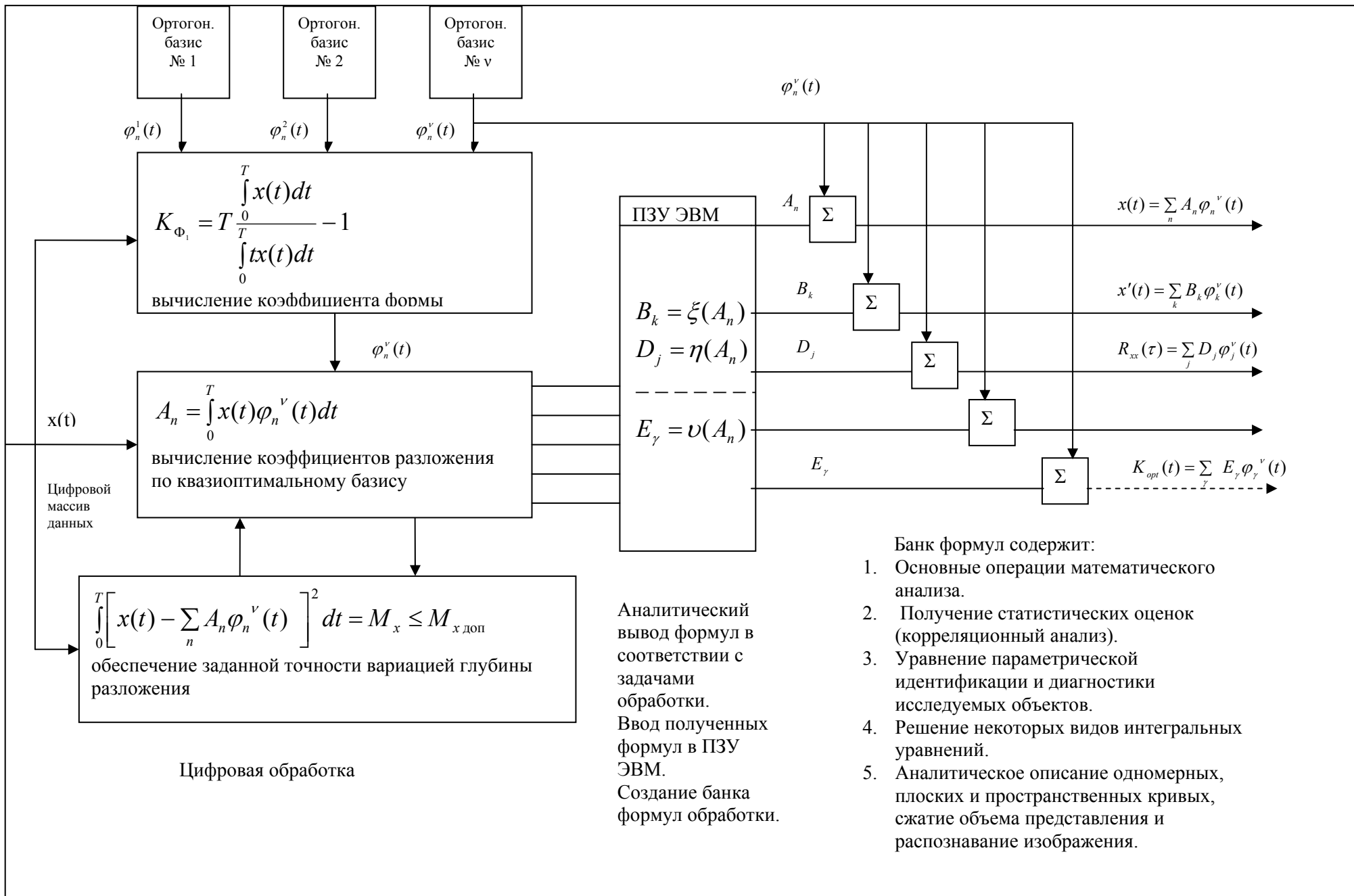
Высокая эффективность указанной вычислительной схемы будет определяться качественным уровнем выполнения следующих основных положений. Процесс аналитического описания входных сигналов должен быть полностью автоматизирован и

иметь адаптивные процедуры, обеспечивающие требуемую точность описания выражениями наименьшей сложности.

Выполнение требуемых аналитических преобразований с отрезками ортогональных рядов в общем виде обычно трудностей не вызывает. Ввод в ЭВМ полученных зависимостей перед началом обработки данных также реализуется достаточно просто.

Вопросы и упражнения.

- 1) Что такое ОСАМ, его основные характеристики.
- 2) Пояснить работу ОСАМ по структурной схеме (см. стр. 29).
- 3) Привести формулы и пояснить смысл равенства Ляпунова-Стеклова и равенства Парсеваля.
- 4) Пояснить, что такое полная система ортогональных функций, что такое свойство жесткости разложения



Глава II. Классические ортогональные полиномы и функции непрерывного аргумента

2.1. Общие сведения

Изучаемые нами ортогональные полиномы относятся к аналитическим функциям. Их появление в начале 19 века обусловлено систематическим изучением ортогональных систем полиномов в связи с развитием метода Фурье решения краевых задач уравнений математической физики. Чрезвычайно важный класс ортогональных систем функций был предложен в середине 19 века русским математиком П.Л.Чебышёвым в его исследованиях по интерполированию способом наименьших квадратов. В дальнейшем усилиями математиков различных стран (Франции, России, Германии и др.) открыты и хорошо изучены многие аналитические ортогональные системы полиномов, которые позже были объединены в группу классических ортогональных полиномов непрерывного аргумента, представленной в таблице 2.1.1.

Рассматриваемые ортогональные системы широко использовались для решения задач теоретической и математической физики. Это привело к тому, что многие авторы относят эту группу классических ортогональных систем к специальным функциям математической физики.

Во второй половине 20 века советские математики А.Ф.Никифоров и В.Б.Уваров в книге «Специальные функции математической физики» [4] показали, что многие важные задачи теоретической и математической физики приводят к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0, \quad (2.1.1)$$

где $\sigma(z)$ и $\tau(z)$ - многочлены первого и второго порядка не зависят от n , а λ_n не зависит от z и определяется выражением

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''. \quad (2.1.2)$$

Уравнение (2.1.1) называют дифференциальным уравнением гипергеометрического типа, а решениями уравнения (2.1.1) являются полиномы гипергеометрического типа $y_n(z)$ [4].

Таблица 2.1.1. Классические ортогональные полиномы непрерывного аргумента

| № п/п | Название многочлена | Обозначение | Общее выражение | Вес $\rho(x)$ | Пределы существования (границы) | |
|-------|-----------------------------------|----------------------------|--|---|---------------------------------|----------|
| | | | | | | |
| 1 | Якоби или гипергеометрические | $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ | $P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 2^{-n} \sum_{m=0}^n \binom{n+\alpha}{m} \binom{n+\beta}{n-m} (x-1)^{n-m} \cdot (x+1)^m$ | $(1-x)^\alpha \cdot (1+x)^\beta$ $\alpha > -1, \beta > -1$ | -1 | 1 |
| 2 | Гегенбауэра или ультрасферические | $C_n^\lambda(x)$ | $C_n^\lambda(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m \Gamma(\lambda + n - m)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-2m+1)} (2x)^{n-2m}$ | $(1-x^2)^{\alpha-0,5}$ $\alpha = \beta = \lambda - 0.5,$ $(\lambda > -0.5)$ | -1 | 1 |
| 3 | Чебышева I рода | $T_n(x)$ | $T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m}$ | $(1-x^2)^{-0,5}$ | -1 | 1 |
| 4 | Чебышева II рода | $U_n(x)$ | $U_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (n-m)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m}$ | $(1-x^2)^{+0,5}$ | -1 | 1 |
| 5 | Лежандра или сферические | $P_n(x)$ | $P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$ | 1 $\alpha = \beta = 0$ | -1 | 1 |
| 6 | Сонина - Лагерра | $L_n^\alpha(x)$ | $L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n C_{n+\alpha}^{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}$ | $x^\alpha e^{-x}$ | 0 | ∞ |
| 7 | Лагерра | $L_n(x)$ | $L_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}$ | e^{-x} | 0 | ∞ |
| 8 | Эрмита | $H_n(x)$ | $H_n(x) = n! \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!}$ | $\exp(-x^2)$ | 0 | ∞ |

Частными решениями уравнений вида (2.1.1) являются следующие классы специальных функций – классические ортогональные полиномы (полиномы Якоби, Лагерра, Эрмита и др.), сферические, цилиндрические, гипергеометрические функции и др.

В дальнейшем мы будем изучать классические ортогональные системы функций непрерывного и дискретного аргументов с целью выявления их сравнительных аппроксимативных свойств при аналитическом описании методом наименьших квадратов информационных данных.

Ортогональные базисы в таблице 2.1.1 можно условно разделить на три группы, объединенных порождающими их формулами.

К первой группе относятся ортогональные базисы, которые задаются общей формулой Якоби и определены на промежутке $[-1,1]$. Эта общая формула имеет параметры α и β , конкретные значения которых в различных сочетаниях приводят как к известным ортогональным системам, так и к возможным другим.

Ко второй группе относятся ортогональные базисы Сонина-Лагерра (обобщенные полиномы Лагерра). Они определены на промежутке $[0,\infty]$ и имеют в задающей их формуле параметр α . При $\alpha = 0$ формула определяет хорошо известные полиномы Лагерра. Задавая α в диапазоне $(-1 < \alpha < \infty)$, можно получить множество ортогональных базисов из семейства Сонина-Лагерра, отличающихся друг от друга формой полиномов.

Наконец, последнюю группу образует ортогональный базис Эрмита, заданный на всей числовой оси $(-\infty < x < \infty)$. Обычно этот базис применяется при статистических исследованиях. Формула, задающая базис, не имеет в своем составе ни одного параметра. Поэтому эта группа представлена одним ортогональным базисом Эрмита.

Если параметры $\alpha = \beta = 0$, то из формулы, задающей базис Якоби с точностью до постоянной, можно получить формулу, определяющую сферические ортогональные полиномы или полиномы Лежандра. При $\alpha = \beta = \pm 0,5$ из общей формулы получают выражения, определяющие ортогональные полиномы Чебышева соответственно первого ($\alpha = \beta = -0,5$) и второго ($\alpha = \beta = 0,5$) рода. При $\alpha = \beta = \sigma - 0,5$ ($\sigma > -0,5$) получают ультрасферические ортогональные полиномы (полиномы Гегенбауэра). Если же значения α и β выбираются произвольно (допустимый диапазон $-1 < \beta < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$) в любых сочетаниях значений α и β , то можно получить большое разнообразие ортогональных базисов, относящихся к классическим, обладающих некоторыми общими свойствами, но имеющих различную форму полиномов и весовых функций, входящих в конкретный ортогональный базис. Часто семейство ортогональных базисов, относящихся к группе

Сонина-Лагерра, модифицируют введением масштабного коэффициента m , о чем будет сказано в дальнейшем изложении.

Прежде чем приступить к детальному изучению конкретных аналитических ортогональных базисов из числа классических, рассмотрим их общие важные свойства [23].

1) Функции $\{\varphi'(x)\}$ образуют также ортогональную систему многочленов [23].

2) Функции $\varphi_n(x)$, принадлежащие к классическим ортогональным системам, удовлетворяют гипергеометрическому дифференциальному уравнению вида (1)

$$A(x)y'' + B(x)y' + \lambda_n y = 0, \text{ где } A(x) \text{ и } B(x) \text{ не зависят от } n, \text{ а } \lambda_n \text{ не зависит от } x.$$

3) Имеет место обобщенная формула Родрига $\varphi_n(x) = \frac{1}{K_n \rho(x)} \frac{d^n [\rho(x) X^n]}{dx^n}$, где K_n - постоянная; X^n - многочлен, коэффициенты которого не зависят от n .

4) Любые три последовательных ортогональных полинома из одного базиса связаны между собой линейным соотношением [23], то есть имеет место рекуррентная формула, которая позволяет по двум известным полиномам определять однозначно третий полином.

5) Для всех ортогональных полиномов из числа классических весовая функция $\rho(x)$ - неотрицательна и интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Любое из первых трех свойств характеризует классические ортогональные полиномы. То есть, система ортогональных полиномов, обладающая одним из этих трех свойств, может быть приведена к семейству классических.

Успешное решение задач аналитического описания информационных данных с привлечением аппарата классических ортогональных базисов основано на методе наименьших квадратов и обусловлено замечательными их аппроксимативными возможностями, которые с учетом использования ЭВМ позволяют по-новому организовать эффективный процесс обработки данных. Сформулируем дополнительные свойства классических ортогональных базисов, которые определяют их значимость в задачах аналитической аппроксимации данных и основаны на общих свойствах, подробно рассмотренных в работах [4,9,20,23,24]:

- полученную в эксперименте функциональную зависимость в виде непрерывной кривой или цифрового массива данных можно всегда описать аналитически отрезком ортогонального ряда с любой, наперед заданной точностью в среднеквадратичном или равномерном смысле;

- аналитическое представление сигнала, полученного в эксперименте, усеченным ортогональным рядом требует знания самого сигнала и не требует знания его производных или сведений о гладкости;
- разложение сигнала в ортогональный ряд является жестким, то есть вычисление новых коэффициентов разложения для повышения точности аппроксимации не влияет на ранее вычисленные коэффициенты;
- разложение сигнала осуществляется не в точке (ряды Тейлора), а на заданном промежутке, который может быть любым;
- при описании исследуемого сигнала ортогональным рядом информация об этом сигнале содержится в коэффициентах разложения;
- коэффициенты разложения ортогонального ряда являются линейно независимыми функционалами.

Широкому использованию классических ортогональных базисов в задачах аналитической аппроксимации информационных массивов, на наш взгляд, препятствовали следующие основные причины:

- фиксированная область существования $[-1,1]$ большинства ортогональных базисов непрерывного аргумента неудобна для аналитической аппроксимации данных;
- отсутствие сведений о влиянии параметров, входящих в формулы, которыми задаются классические ортогональные базисы непрерывного или дискретного аргументов, на изменение свойств этих базисов, а также на изменение характера их весовых функций;
- трудности, связанные с вычислением коэффициентов разложения исследуемых сигналов по выбранному ортогональному базису;
- отсутствие рекомендаций по выбору наиболее подходящих ортогональных полиномов или функций в конкретных задачах;
- отсутствие практических способов определения оптимальных условий аппроксимации функций наиболее коротким усеченным ортогональным рядом;
- отсутствие сведений о сложности и возможности технической реализации спектральных анализаторов различных ортогональных базисов непрерывного аргумента.

Несмотря на это, максимальное использование положительных свойств классических ортогональных базисов и преодоление трудностей применения их в задачах

аппроксимации данных открывают дополнительные возможности в создании новых эффективных методов аналитического описания и обработки информационных массивов.

Важное замечание. В математической литературе, особенно в справочной литературе, классические ортогональные системы полиномов и функций непрерывного и дискретного аргументов приводятся в ненормированной форме. Использование ненормированных систем функций в задачах аналитической аппроксимации нецелесообразно. Поэтому следует перед применением проверить их нормировку по формуле

$$\|\varphi_n(t)\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(t) \rho(t) dt} . \quad (2.1.3)$$

Если данное выражение не равно единице, то $\varphi_n(t)$ – ненормированные функции и их следует подвергнуть нормировке по следующей формуле:

$$\varphi_n(t) = \frac{\bar{\varphi}_n(t)}{\sqrt{\int_a^b \bar{\varphi}_n^2(t) \rho(t) dt}} , \quad (2.1.4)$$

где $\bar{\varphi}_n(t)$ – ненормированные функции, а $\varphi_n(t)$ – нормированные функции.

Пусть

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x) \rho(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 1, & \text{если } i = j \end{cases} . \quad (2.1.5)$$

Последовательность таких функций называется ортонормированной. В дальнейшем в процессе работы следует внимательно проверять выполнение условий нормировки ортогональных систем полиномов и функций.

Вопросы и упражнения.

1. На какие большие группы делятся классические ортогональные системы полиномов?
2. Расскажите по таблице 2.1.1 об особенностях семейств классических ортогональных полиномов и функций.
3. Почему удобно все ортогональные системы в задачах аппроксимации разделять на системы полиномов и системы функций? Покажите, как это достигается.
4. Сформулируйте основные важные свойства классических ортогональных базисов.
5. Сформулируйте дополнительные свойства классических ортогональных базисов, определяющие их значимость в задачах аналитической аппроксимации данных.

6. Что сдерживало широкое применение классических ортогональных базисов в задачах аналитической аппроксимации информационных данных?

2.2. Модификация классических полиномов непрерывного аргумента

Более удобное использование классических ортогональных базисов в практических задачах, а также расширение ассортимента ортогональных базисов обусловило принятие решения провести их модификацию.

В этих целях предлагается следующее.

1. Использовать линейную подстановку вида $x = \frac{2t}{T} - 1$, которая сдвигает область существования ортогональных базисов с промежутка $(-1, 1)$ на промежуток $(0, T)$. Вариация T в конкретной задаче позволяет легко согласовывать длительность каждого сигнала, подлежащего аналитическому описанию с промежутком существования базиса.
2. Использовать нелинейную подстановку типа $x = 1 - 2\exp(-mt)$, где t – новый аргумент, m – масштабный коэффициент, имеющий размерность обратную размерности аргумента t , которая сдвигает промежуток существования на $(0, \infty)$ с промежутка $(-1, 1)$.

Вариация коэффициента m позволяет в процессе аналитической аппроксимации получать наиболее подходящие условия для описания реальных конкретных сигналов с заданной точностью наиболее коротким отрезком ортогонального ряда.

В следующих главах будут подробно исследованы возможности введения адаптивных процедур в процессе аппроксимации данных за счет изменения T или m в конкретных задачах для получения заданной точности аналитического описания при $N = N_{\min}$.

Следует обратить внимание читателя на то, что, решая задачи аналитического описания информационных данных при подборе ортогональных базисов, следует четко различать класс поступающих сигналов: относятся ли они к функциям с интегрируемым квадратом, то есть к пространству L^2 , что соответствует случаю, когда $\rho(x) \equiv 1$, либо они интегрируемы с квадратом с весом $\rho(x)$, то есть относятся к пространству L^2_ρ с весом отличным от единицы.

Было принято в дальнейшем составляющие базисов, весовая функция которых отлична от единицы, то есть $\rho(x) \neq 1$, называть ортогональными полиномами и обозначать их заглавными буквами, а базисы, имеющие $\rho(x) \equiv 1$, состоящими из ортогональных функций, обозначать их строчными буквами.

Например. При разложении $f(x)$ относящейся к L^2_ρ следует использовать полиномы, также относящиеся к L^2_ρ . Вычисление коэффициентов разложения $f(x)$ по полиномам $\Phi_n(x)$ с весом $\rho(x)$ следует проводить по формуле:

$$A_n = \int_a^b f(x)\Phi_n(x)\rho(x)dx. \quad (2.2.1)$$

Восстановление функции $f(x)$ происходит по формуле

$$f(x) = \sum_{n=0}^N A_n \Phi_n(x). \quad (2.2.2)$$

Если же $f(x)$ относится к пространству L^2 при $\rho(x) \equiv 1$, то коэффициенты разложения определяются формулой:

$$A_n = \int_a^b f(x) \cdot \varphi_n(x) dx, \quad (2.2.3)$$

где $\varphi_n(x) = \Phi_n(x) \cdot \sqrt{\rho(x)}$ - соответствующие базисные функции.

Восстановление сигнала происходит по следующему выражению

$$f(x) = \sum_{n=0}^N A_n \cdot \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^N A_n \Phi_n(x) \cdot \sqrt{\rho(x)}. \quad (2.2.4)$$

Таблица модифицированных классических ортогональных базисов приведена в Приложении 1.

Вопросы и упражнения.

1. Чем вызвана необходимость модификации классических ортогональных полиномов непрерывного аргумента?
2. Линейная и нелинейная подстановки, приводящие исходные ортогональные базисы к их модификации.
3. Основные математические операции и их последовательность выполнения при разложении в ортогональный ряд функции $f(t)$ по системе ортогональных полиномов $\{\varphi(t)\}$ с весовой функцией $\rho(t) \neq 1$ и ортогональных функций с весовой функцией $\rho(t) \equiv 1$.

2.3. Полиномы и функции семейства Якоби

2.3.1. Основные сведения

[Якоби Карл Густав Якоб (Jacobi Carl Gustav Jacob) (1804-1851) немецкий математик, почетный член Петербургской АН.]

В параграфе 2.1 было показано, что частными решениями уравнения гипергеометрического типа (2.1.1) являются полиномы гипергеометрического типа $y_n(z)$, явные выражения которых даются формулой Родрига

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} [\sigma^n(z) \rho(z)]^{(n)}, \quad (2.3.1)$$

где B_n - нормировочная постоянная, а функция $\rho(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона [4]:

$$[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z) \quad (2.3.2)$$

Соотношение (2.3.1) вывел в 1814 году французский математик Б.О.Родриг для частного случая полиномов гипергеометрического типа – полиномов Лежандра, а К.Якоби обобщил эту формулу, опубликованную в 1859 году, на случай многочленов, им предложенных и изученных.

Можно показать [4], что линейной заменой независимой переменной выражения для $\sigma(z)$ и $\rho(z)$ приводятся (с точностью до постоянного множителя) к следующим каноническим видам:

$$\rho(z) = \begin{cases} (1-z)^\alpha (1+z)^\beta & \text{при } \sigma(z) = 1-z^2; \\ z^\alpha e^{-z} & \text{при } \sigma(z) = z; \\ e^{-z^2} & \text{при } \sigma(z) = 1. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

При такой замене уравнения (2.3.1) и (2.3.2) перейдут в уравнения того же вида, а полиномы $y_n(z)$ останутся полиномами гипергеометрического типа, определенные формулой Родрига (2.3.1).

Заметим, что в дальнейшем, не нарушая общности выводов, заменим комплексную переменную z на вещественную x .

Покажем, что в зависимости от вида функции $\rho(x)$ (2.3.3) можно получать различные системы (базисы) ортогональных полиномов.

2.3.2. Полиномы и функции Якоби

Пусть $\sigma(x) = 1 - x^2$ и $\tau(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha$. Тогда соответствующие полиномы $y_n(x)$ при $B_n = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}$ называются полиномами Якоби или гипергеометрическими и обозначаются $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Они заданы на промежутке $(-1, 1)$.

Их весовая функция имеет вид:

$$\rho(x) = (1 - x)^\alpha \cdot (1 + x)^\beta, \quad (2.3.4)$$

где α и β – параметры, изменение которых существенно меняет свойства базиса. Для соблюдения сходимости интеграла от весовой функции требуется выполнение условий

$$\alpha > -1, \beta > -1 \quad (2.3.5)$$

Стандартизация полиномов Якоби имеет вид:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n + \alpha}{n} = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!}, \quad (2.3.6)$$

$(a)_n = a(a + 1)(a + 2) \dots (a + n - 1) = \frac{\Gamma(a + n)}{\Gamma(a)}$ называется символом Похгаммера [28].

$$(a)_0 = 1$$

Формула Родрига:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-1)^n \frac{(1 - x)^{-\alpha} \cdot (1 + x)^{-\beta}}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1 - x)^{\alpha+n} \cdot (1 + x)^{\beta+n} \right]. \quad (2.3.7)$$

Рекуррентное соотношение полиномов Якоби [23]:

$$2(n + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) = (2n + \alpha + \beta + 1)[(2n + \alpha + \beta) \cdot (2n + \alpha + \beta + 2)x + \alpha^2 - \beta^2]P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - 2(n + \alpha)(n + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x). \quad (2.3.8)$$

Из (2.3.7) можно получить явное выражение

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 2^{-n} \sum_{m=0}^n \binom{n + \alpha}{m} \binom{n + \beta}{n - m} (x - 1)^{n-m} \cdot (x + 1)^m. \quad (2.3.9)$$

Из (2.3.9) очевидно соотношение

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) = (-1)^n \cdot P_n^{(\alpha, \beta)}(x). \quad (2.3.10)$$

Частные значения Якоби:

$$P_0^{(\alpha, \beta)}(x) = 1, \quad (2.3.11)$$

$$P_1^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta + x(2 + \alpha + \beta)),$$

$$P_2^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2}(1 + \alpha)(2 + \alpha) + \frac{1}{2}(-1 + x)(2 + \alpha)(3 + \alpha + \beta) + \frac{1}{8}(-1 + x)^2(3 + \alpha + \beta)(4 + \alpha + \beta),$$

$$P_3^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{6}(1 + \alpha)(2 + \alpha)(3 + \alpha) + \frac{1}{4}(-1 + x)(2 + \alpha)(3 + \alpha)(4 + \alpha + \beta) + \frac{1}{8}(-1 + x)^2(3 + \alpha)(4 + \alpha + \beta)(5 + \alpha + \beta) + \frac{1}{48}(-1 + x)^3(4 + \alpha + \beta)(5 + \alpha + \beta)(6 + \alpha + \beta),$$

$$P_4^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{24}(1 + \alpha)(2 + \alpha)(3 + \alpha)(4 + \alpha) + \frac{1}{12}(-1 + x)(2 + \alpha)(3 + \alpha)(4 + \alpha)(5 + \alpha + \beta) + \frac{1}{16}(-1 + x)^2(3 + \alpha)(4 + \alpha)(5 + \alpha + \beta)(6 + \alpha + \beta) + \frac{1}{48}(-1 + x)^3(4 + \alpha)(5 + \alpha + \beta)(6 + \alpha + \beta)(7 + \alpha + \beta) + \frac{1}{384}(-1 + x)^4(5 + \alpha + \beta)(6 + \alpha + \beta)(7 + \alpha + \beta)(8 + \alpha + \beta).$$

Модифицированные (смещенные) ортонормированные полиномы Якоби:

а) предел существования $[0, T]$:

$$R_n^{\alpha\beta}(x) = \sqrt{\frac{(\alpha + \beta + 2n + 1)\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\beta + n + 1)}{2^{\alpha+\beta} T n!}} \times \times \frac{1}{T^n} \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k (x - T)^k x^{n-k}}{\Gamma(\alpha + k + 1)\Gamma(\beta + n - k + 1)}; \quad (2.3.12)$$

б) смещенные на $[0, \infty)$:

$$R_n^{\alpha\beta}(mx) = \sqrt{\frac{m(\alpha + \beta + 2n + 1)\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\beta + n + 1)}{2^{\alpha+\beta} n!}} \times \times \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k (-1)^k e^{-(0.5+k)mx} (1 - e^{-mx})^{n-k}}{\Gamma(\alpha + k + 1)\Gamma(\beta + n - k + 1)}. \quad (2.3.13)$$

Смещенные функции Якоби:

а) интервал существования $(0, T)$:

$$Y_n^{\alpha\beta}(x) = \sqrt{\frac{(\alpha + \beta + 2n + 1)\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\beta + n + 1)}{T^{2n+\alpha+\beta+1} n!}} \times \times \frac{1}{T^n} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k (T - x)^{\alpha/2+k} x^{\beta/2+n-k}}{\Gamma(\alpha + k + 1)\Gamma(\beta + n - k + 1)}; \quad (2.3.14)$$

б) смещенные на $[0, \infty)$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Y}_n^{\alpha\beta}(mx) = & \sqrt{\frac{m(\alpha + \beta + 2n + 1)\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\beta + n + 1)}{n!}} \times \\
 & \times \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k (-1)^k e^{-(0.5+k+\alpha/2)mx} (1 - e^{-mx})^{n-k}}{\Gamma(\alpha + k + 1)\Gamma(\beta + n - k + 1)}.
 \end{aligned}
 \tag{2.3.15}$$

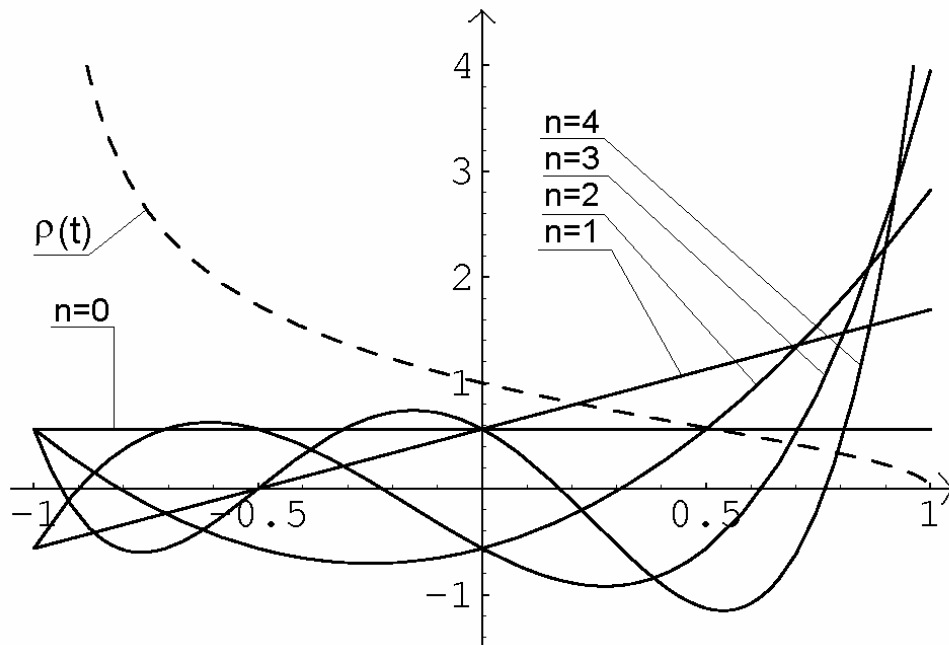


Рис. 2.3.1. Ортонормированные полиномы Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ при $\alpha = 0.5$, $\beta = -0.5$, $n = 0, \dots, 4$.

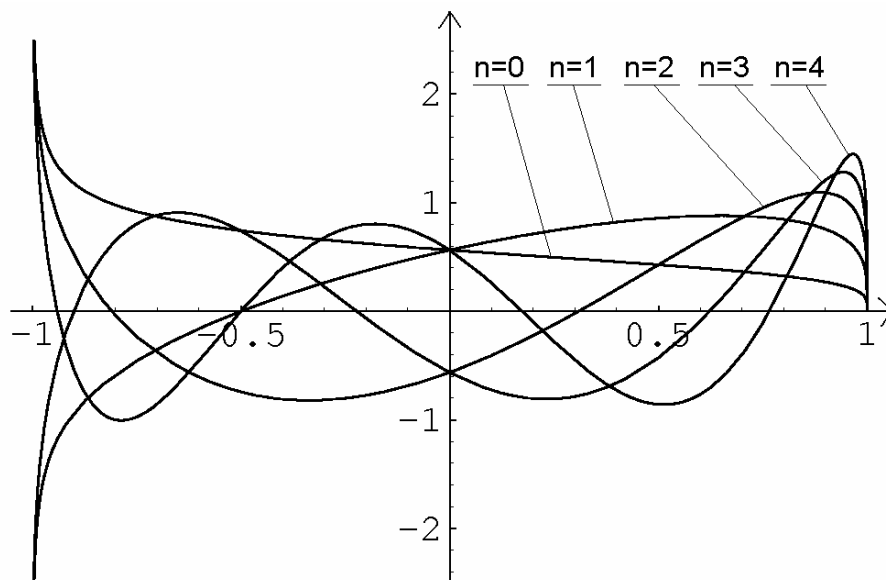


Рис. 2.3.2. Ортонормированные функции Якоби $p_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ при $\alpha = 0.5$, $\beta = -0.5$, $n = 0, \dots, 4$.

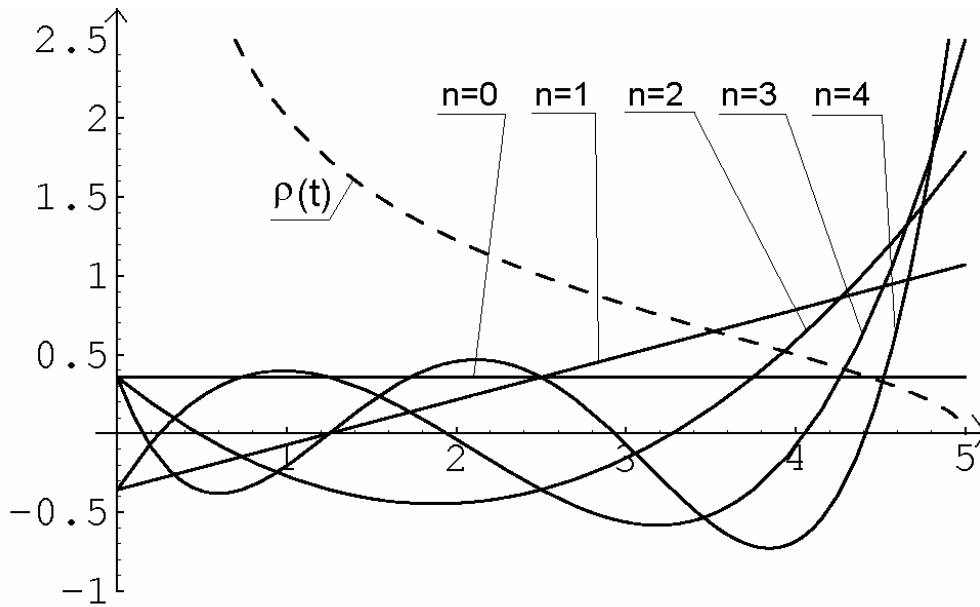


Рис. 2.3.3. Смещенные на $[0,5]$ ортонормированные полиномы Якоби при $\alpha = 0.5, \beta = -0.5, n = 0, \dots, 4$.

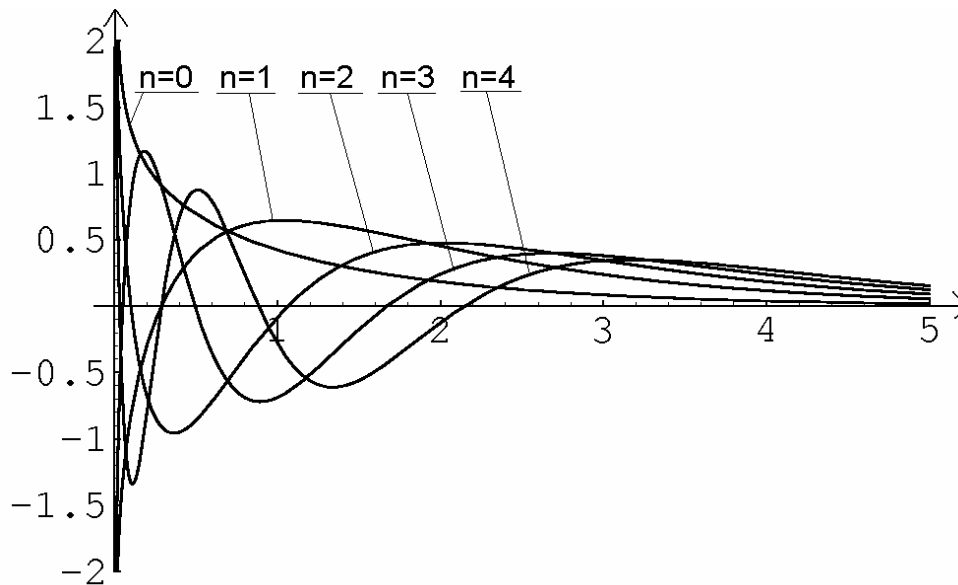


Рис. 2.3.4. Смещенные на $[0, \infty]$ ортонормированные функции Якоби $\alpha = 0.5, \beta = -0.5, n = 0, \dots, 4$.

2.3.3. Полиномы и функции Гегенбауэра или ультрасферические

[Гегенбауэр Леопольд Бернхард (*Gegenbauer Leopold Bernhard*) (1849-1903) – австрийский математик. Основные труды по теории чисел и специальных функций.]

Полиномы, полученные с точностью до постоянной из общей формулы Якоби при $\alpha = \beta = \lambda - 0.5, (\lambda > -0.5)$, называются ультрасферическим или многочленами Гегенбауэра.

Они определены на промежутке $[-1, 1]$ и обозначаются $C_n^\lambda(x)$.

Стандартизация.

$$C_n^\lambda(1) = \binom{n+2\lambda-1}{n} = \frac{(2\lambda)}{n!}. \quad (2.3.16)$$

Выбранная стандартизация утрачивает силу, если $2\lambda = 0$ или отрицательное число. Единственным исключением в области $\lambda > -0.5$ является точка $\lambda = 0$. При $\lambda = 0$ введем стандартизацию условием

$$C_0^0(1) = 1, \quad C_n^0(1) = \frac{2}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3.17)$$

Весовая функция.

$$\rho(x) = (1-x^2)^{\alpha-0.5}. \quad (2.3.18)$$

Формула Родрига.

$$C_n^\lambda(x) = \frac{\Gamma(\lambda+0.5)\Gamma(n+2\lambda)}{(-1)^n 2^n n! \Gamma(2\lambda)\Gamma(\lambda+n+0.5)(1-x^2)^{\lambda-0.5}} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^{\lambda-0.5}(1-x^2)^n), \quad (2.3.19)$$

или

$$\begin{aligned} 2^n n! (\lambda+0.5)_n (1-x^2)^{\lambda-0.5} C_n^\lambda(x) &= (-1)^n (2\lambda)_n D^n [(1-x^2)^{n+\lambda-0.5}] \\ C_0^\lambda(x) &= 1, \\ C_1^\lambda(x) &= 2\lambda x, \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

где выражение типа $(\lambda+0.5)_n$ - символ Похгаммера (см. п. 2.3.2)

Рекуррентная формула:

$$(n+1)C_{n+1}^\lambda(x) = 2(n+\lambda)x C_n^\lambda(x) - (n-2\lambda-1)C_{n-1}^\lambda(x). \quad (2.3.21)$$

Явные выражения:

$$\begin{aligned} C_n^\lambda(x) &= \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^m (\lambda)_{n-m}}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^m \Gamma(\lambda+n-m)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-2m+1)} (2x)^{n-2m}, \\ C_n^\lambda(0) &= \begin{cases} 0, & \text{если } n - \text{нечетное} \\ \frac{(-1)^m (\lambda)_m}{m!}, & \text{если } n = 2m - \text{четное,} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

где $\left[\frac{n}{2}\right]$ - символ антье, есть наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{n}{2}$.

Модифицированные (смещенные) ортонормированные полиномы Гегенбауэра

а) интервал существования $[0, T]$:

$$C_n^\lambda(x, T) = \sqrt{\frac{(\lambda+n)\Gamma(2\lambda+n)}{2^{2\lambda-2} T n!}} \frac{\Gamma(\lambda+n+0.5)}{T^n} \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k(x-T)^k x^{n-k}}{\Gamma(\lambda+k+1)\Gamma(\beta+n-k+1)}, \quad (2.3.23)$$

б) смещенный на $[0, \infty)$:

$$C_n^\lambda(mt) = \sqrt{\frac{m(\lambda+n)\Gamma(2\lambda+n)}{2^{2\lambda-2} n!}} \Gamma(\lambda+n+0.5) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k e^{-(0.5+k)mt}}{\Gamma(\lambda+k+0.5)\Gamma(\lambda+n-k+0.5)} (1-e^{-mt})^{n-k}. \quad (2.3.24)$$

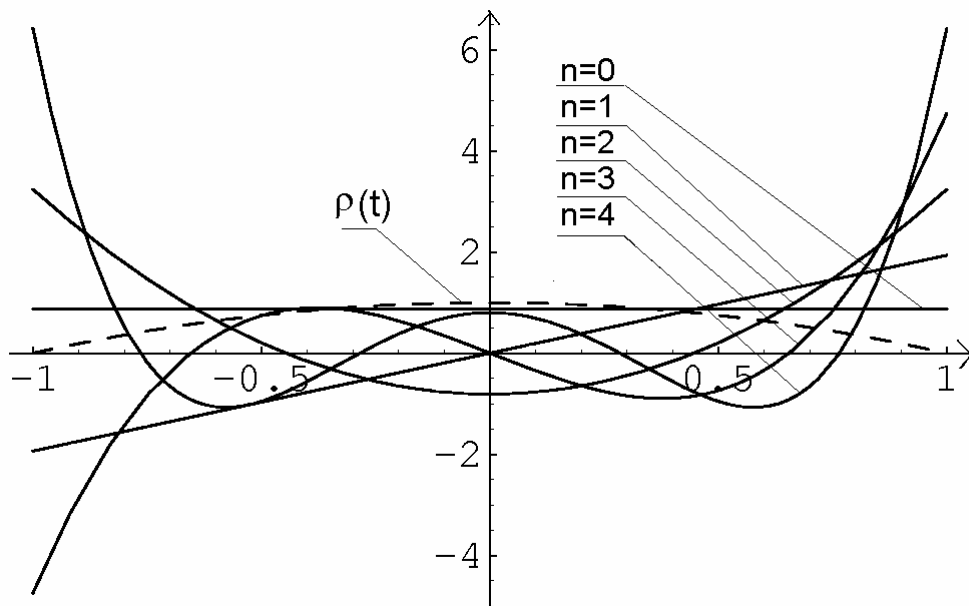


Рис. 2.3.5. Ортонормированные полиномы Гегенбауэра при $\lambda = 1.5$.

2.3.4. Полиномы Чебышёва первого и второго рода

[Чебышев Пафнутий Львович (1821-1894) – русский математик и механик, академик Петербургской АН.]

Очевидно, что многочлены Чебышёва первого рода $T_n(x)$ можно получить с точностью до постоянного множителя из многочленов Якоби при $\alpha = \beta = -0,5$. А многочлены Чебышёва второго рода $U_n(x)$ - при $\alpha = \beta = 0,5$. Они заданы на промежутке $(-1, 1)$ с весовой функцией

$$\rho(x) = (1-x^2)^{-0,5}. \quad (2.3.25)$$

Рассмотрим свойства полиномов Чебышёва первого рода.

Соотношение ортогональности для полиномов Чебышёва первого рода имеет вид:

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \text{ при } n \neq m. \quad (2.3.26)$$

Стандартизация определяется выражением [28]:

$$T_n(1) = 1. \quad (2.3.27)$$

Весовая функция:

$$\rho(x) = (1-x^2)^{-0,5}. \quad (2.3.28)$$

Формула Родрига:

$$2^n (0,5)_n \cdot T_n(x) = (-1)^n \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n-0,5}]. \quad (2.3.29)$$

Рекуррентное соотношение для полиномов Чебышёва 1-го рода

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \quad (2.3.30)$$

Явное выражение полиномов Чебышёва 1-го рода

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3.31)$$

Частные случаи

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_1(x) &= x, & T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, & T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x. \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

Модифицированные (смещенные) ортонормированные полиномы Чебышёва 1-го рода:

а) на отрезке $[0, T]$:

$$T_n(t, T) = \sqrt{\frac{4n\Gamma(n)}{Tn!}} \Gamma(n+0,5) \frac{1}{T^n} \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{\Gamma(k+0,5)\Gamma(n-k+0,5)} (t-T)^k t^{n-k}; \quad (2.3.33)$$

б) на промежутке $[0, \infty]$:

$$T_n(mt) = \sqrt{\frac{4mn\Gamma(n)}{n!}} \Gamma(n+0,5) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{\Gamma(k+0,5)\Gamma(n-k+0,5)} e^{-(0,5+k)mt} (1-e^{-mt})^{n-k}. \quad (2.3.34)$$

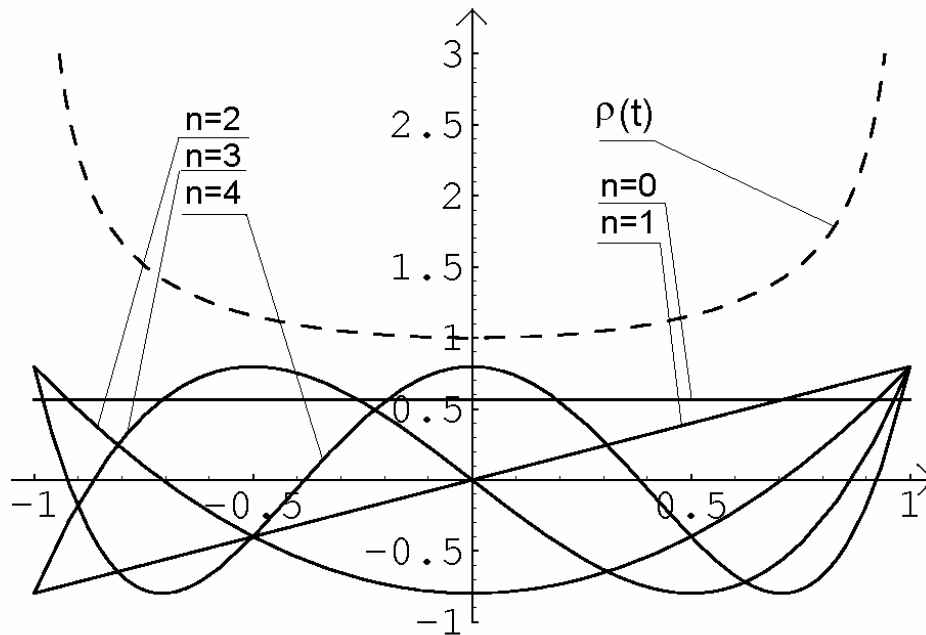


Рис. 2.3.6. Ортонормированные полиномы Чебышева первого рода $T_n(x)$; $n = 0, \dots, 4$.

Рассмотрим свойства полиномов Чебышёва второго рода.

Соотношение ортогональности:

$$\int_{-1}^{+1} U_n(x) \cdot U_m(x) \sqrt{1-x^2} dx = 0 \quad \text{при } n \neq m. \quad (2.3.35)$$

Весовая функция:

$$\rho(x) = (1-x^2)^{+0,5}. \quad (2.3.36)$$

Стандартизация

$$U_n(1) = n + 1. \quad (2.3.37)$$

Формула Родрига

$$2^{n+1} (0,5)_{n+1} U_n(x) = (-1)^n \cdot (n+1) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n+0,5}]. \quad (2.3.38)$$

Рекуррентная формула

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x). \quad (2.3.39)$$

Явное выражение

$$U_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (n-m)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m}. \quad (2.3.40)$$

Частные случаи

$$\begin{aligned}
U_0(x) &= 1, & U_3(x) &= 8x^3 - 4x, \\
U_1(x) &= 2x, & U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1, \\
U_2(x) &= 4x^2 - 1, & U_5(x) &= 32x^5 - 32x^3 - 6x.
\end{aligned}
\tag{2.3.41}$$

Модифицированные (смещенные) полиномы Чебышёва 2-го рода
а) на интервале $[0, T]$:

$$U_h(t, T) = \sqrt{\frac{(n+1)\Gamma(n+2)}{Tn!}} \Gamma(n+1,5) \frac{1}{T^n} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{\Gamma(k+1,5)\Gamma(n-k+1,5)} \cdot (t-T)^k t^{n-k}; \tag{2.3.42}$$

б) на промежутке $(0, \infty)$:

$$U(mt) = \sqrt{\frac{m(n+1)\Gamma(n+2)}{n!}} \Gamma(n+1,5) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{\Gamma(k+1,5)\Gamma(n-k+1,5)} e^{-(0,5+k)mt} (1 - e^{-mt})^{n-k}. \tag{2.3.43}$$

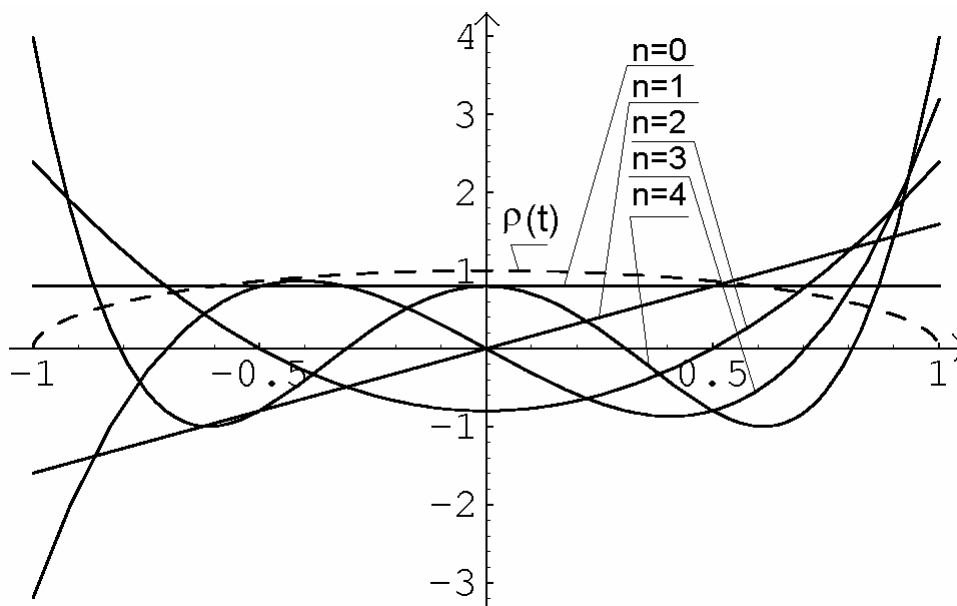


Рис. 2.3.7. Ортонормированные полиномы Чебышева второго рода $U_n(x)$; $n = 0, \dots, 4$.

2.3.5. Классические полиномы Лежандра или сферические

[Лежандр Адриен Мари (*Legendre Adrien Marie*) (1752-1833) – французский математик, член Парижской АН.]

Полиномы, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с единичным весом $\rho(x) \equiv 1$, называются полиномами Лежандра или сферическими полиномами. Они имеют обозначение $P_n(x)$ или $P_n^{(0,0)}(x)$, второе обозначение вошло в обиход, поскольку полиномы Лежандра сферические можно получить с точностью до постоянной из общей формулы Якоби при $\alpha = \beta = 0$.

Весовая функция полиномов Лежандра

$$\rho(x) = 1. \quad (2.3.44)$$

Формула Родрига.

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} [(x^2 - 1)^n]^{(n)}. \quad (2.3.45)$$

Несколько первых полиномов Лежандра:

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad (2.3.46)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \dots$$

Нормировка. Подсчитаем норму многочлена $P_n(t)$.

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}, \quad (2.3.47)$$

$$\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Рекуррентное соотношение

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x). \quad (2.3.48)$$

Используя линейную подстановку $x = \frac{2t}{T} - 1$, которая сдвигает область существования $[-1,1]$ на промежуток $[0,T]$, можно получить модифицированные (смещенные) ортонормированные полиномы Лежандра

$$P_n(t, T) = \sqrt{\frac{(2n+1)}{T}} \cdot \frac{n!}{T^n} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k!(n-k)!} (t-T)^k t^{n-k}. \quad (2.3.49)$$

Запишем несколько первых нормированных на $[0,T]$ полиномов:

$$\begin{aligned}
P_0(t, T) &= \frac{1}{\sqrt{T}}, \\
P_1(t, T) &= \frac{1}{T} \sqrt{\frac{3}{T}} (2t - T), \\
P_2(t, T) &= \frac{1}{T} \sqrt{\frac{5}{T}} (6t^2 - 6tT + T^2), \\
P_3 &= \sqrt{\frac{7}{T}} \cdot \frac{1}{T^3} (20t^3 - 30t^2T + 12tT^2 - T^3), \\
P_4 &= \sqrt{\frac{9}{T}} \frac{1}{T^4} (70t^4 - 140t^3T + 90t^2T^2 - 20tT^3 + T^4).
\end{aligned} \tag{2.3.50}$$

Коэффициенты разложения функции $f(t)$ в ряд по полиномам Лежандра на промежутке $[0, T]$ вычисляются по формуле:

$$B_n = \int_0^T f(t) P_n(t, T) dt. \tag{2.3.51}$$

Формула восстановления $f(t)$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(t, T). \tag{2.3.52}$$

Нелинейная подстановка вида $x = 1 - 2 \exp(-mt)$, где t - новый аргумент, m - масштабный коэффициент, переводит область существования $[-1, 1]$ на полубесконечный промежуток $[0, \infty)$.

Три первых смещенных ортогональных полинома Лежандра на промежутке $[0, \infty)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
P_0(m, t) &= \sqrt{m} e^{-0,5mt}, \\
P_1(m, t) &= \sqrt{3m} (-1 + 2e^{-mt}) e^{-0,5mt}, \\
P_2(m, t) &= \sqrt{5m} (1 - 6e^{-mt} + 6e^{-2mt}) e^{-0,5mt}.
\end{aligned} \tag{2.3.53}$$

Общая формула модифицированных ортонормированных полиномов Лежандра на отрезке $[0, \infty)$:

$$P_n(mt) = \sqrt{(2n+1)m} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k C_n^k e^{-(0.5+k)mt} (1 - e^{-mt})^{n-k}. \tag{2.3.54}$$

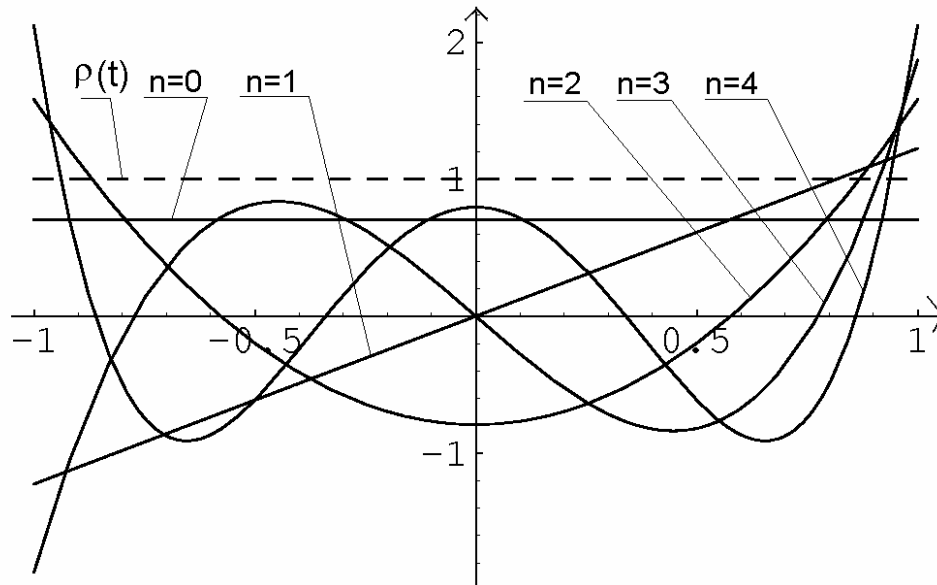


Рис. 2.3.8. Ортонормированные полиномы Лежандра $P_n(x)$; $n = 0(1)4$.

Вопросы и упражнения.

1. Проверить принадлежность функции $f(t) = \sin(2t)e^{-t}$ к пространству L_2 .
2. Аппроксимировать кривую $f(t) = \sin(2t)e^{-t}$ полиномами Лежандра и двумя любыми другими полиномами (на выбор). Вычислить точность аппроксимации. Какой из выбранных ортогональных базисов более всего подходит для данной задачи?

2.4. Ортогональные полиномы и функции Сонина-Лагерра

[Сонин Николай Яковлевич (1849-1915) – русский математик, академик Петербургской АН.]

Лагерр Эдмон Никола (Laguerre Edmon Nicolas) (1834-1886) – французский математик, член Парижской АН.]

Пусть в уравнении гипергеометрического типа (2.1.1) коэффициенты имеют вид:

$$\sigma(x) = x, \quad \tau(x) = \alpha + 1 - x,$$

тогда решением уравнения (2.1.1) при $\lambda_n = n$ будут полиномы соответствующей степени n . Эти полиномы образуют при каждом действительном $-1 < \alpha < \infty$ систему полиномов, ортогональных на интервале $(0, \infty)$.

В частном случае полиномы при $\alpha = 0$ предложил и изучил французский математик Лагерр.

Ортогональные полиномы при $\alpha \neq 0$ обычно называют обобщенными полиномами Лагерра, которые на самом деле он не изучал. Впервые ортогональные полиномы с весовой функцией

$$\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$$

исследовал профессор Петербургского университета Сонин Николай Яковлевич [29].

Поэтому, на наш взгляд, справедливо указанные ортогональные системы называть полиномами Сони́на-Лагерра, при $\alpha \neq 0$, и соответственно обозначать $L_n^{(\alpha)}(x)$, а при $\alpha=0$, полиномами Лагерра $L_n(x)$.

Часто целесообразно пользоваться системами ортогональных функций, заданных на интервале $(0, \infty)$ с весом $\rho(x) = 1$, если принять $l_n(x) = L_n(x) \cdot \sqrt{e^{-x}}$ или $l_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) \sqrt{x^\alpha \cdot e^{-x}}$ и соответственно называемых функциями Лагерра или функциями Сони́на-Лагерра.

Существует формула Родрига для $L_n^{(\alpha)}(x)$:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} e^{-x} \cdot x^\alpha \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} \cdot e^{-x}). \quad (2.4.1)$$

Рекуррентное соотношение для полиномов Сони́на-Лагерра имеет вид:

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)} = (2n + \alpha + 1 - x)L_n^{(\alpha)} - (n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}, \quad (2.4.2)$$

согласно которому мы можем найти значения любых полиномов, имея значения первых двух $L_0^{(\alpha)}$ и $L_1^{(\alpha)}$.

Полиномы Сони́на-Лагерра имеют явное выражение:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n C_{n+\alpha}^{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}. \quad (2.4.3)$$

Частные случаи (для полиномов Сони́на-Лагерра).

$$\begin{aligned} L_0^\alpha &= 1; \\ L_1^\alpha &= \alpha + 1 - x; \\ L_2^\alpha &= 1 - \frac{5\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2} - (2 + \alpha)x + \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Частные случаи (для полиномов Лагерра).

$$\begin{aligned}
L_0 &= 1; \\
L_1 &= 1 - x; \\
L_2 &= 1 - 2x + \frac{x^2}{2}; \\
L_3 &= 1 - 3x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{6}.
\end{aligned}
\tag{2.4.5}$$

Норма полиномов Сонина-Лагерра:

$$\|L_n^{(\alpha)}\| = \sqrt{\frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}}.
\tag{2.4.6}$$

В дальнейшем будем иметь дело с нормированными полиномами и функциями.

При разложении функции $f(x) \in L^2$ по полиномам коэффициенты разложения вычисляются по известному интегралу Фурье

$$A_n = \int_0^{\infty} f(x) L_n^{\alpha}(x) x^{\alpha} e^{-x} dx,
\tag{2.4.7}$$

а восстановление функции $f(x)$ происходит по формуле

$$f(x) = \sum_{n=0}^N A_n L_n^{\alpha}(x).
\tag{2.4.8}$$

Если же разложение $f(x)$ выполняется по функциям, то интеграл имеет вид

$$A_n = \int_0^{\infty} f(x) l_n^{\alpha}(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) L_n^{\alpha}(x) \sqrt{x^{\alpha} e^{-x}} dx,
\tag{2.4.9}$$

а восстановление функции выполняется в соответствии с выражением

$$f(x) = \sum_{n=0}^N A_n \cdot l_n^{\alpha}(x).
\tag{2.4.10}$$

Внешний вид полиномов и функций семейства Сонина-Лагерра может существенно меняться при различных α , что делает возможным подбирать подходящий базис, наилучшим образом описывающий функцию $f(x)$, то есть обеспечивающий заданную точность аналитической аппроксимации выражением наименьшей сложности.

Приведем графики полиномов Сонина-Лагерра:

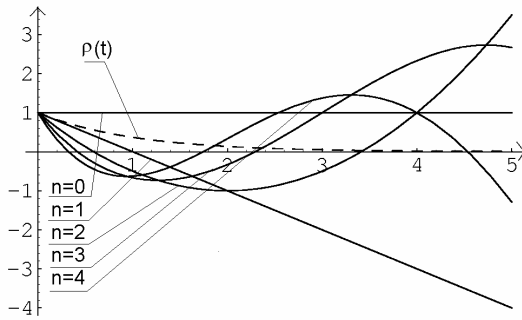


Рис.2.4.1. Ортонормированные полиномы Лагерра

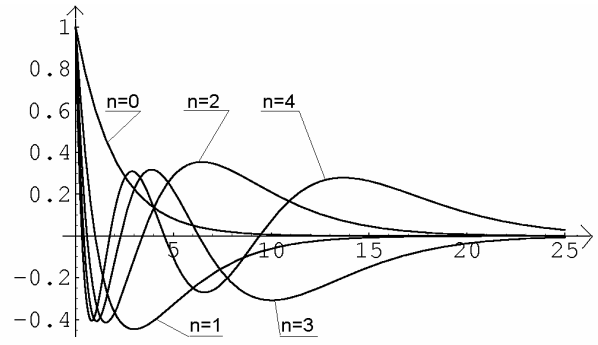


Рис.2.4.2. Ортонормированные функции Лагерра

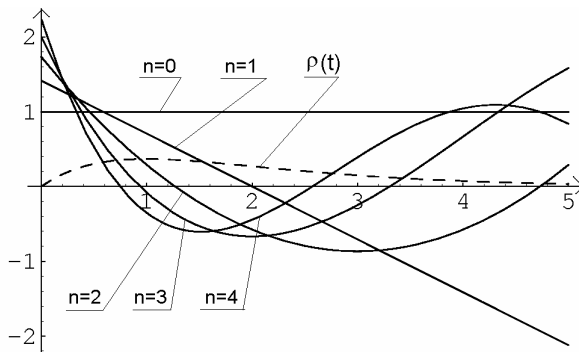


Рис.2.4.3. Ортонормированные полиномы из семейства Сонина-Лагерра при $\alpha = 1$.

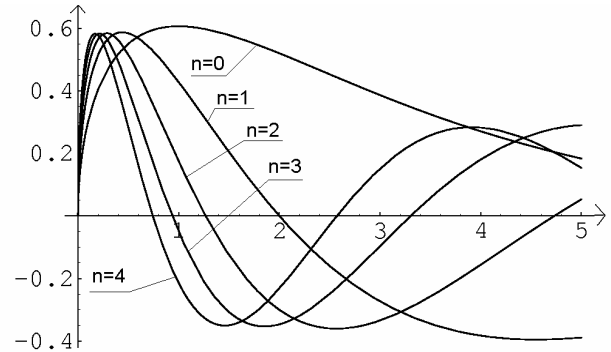


Рис.2.4.4. Ортонормированные функции из семейства Сонина-Лагерра при $\alpha = 1$.

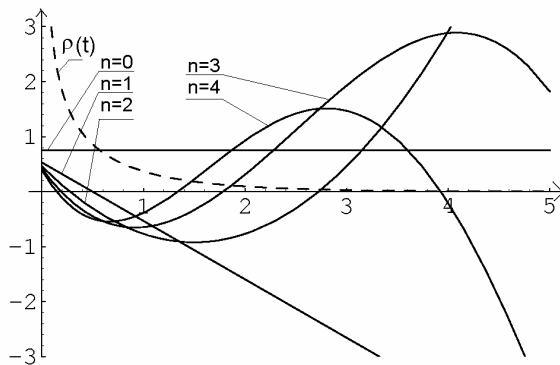


Рис.2.4.5. Ортонормированные полиномы из семейства Сонина-Лагерра при $\alpha = -0.5$.

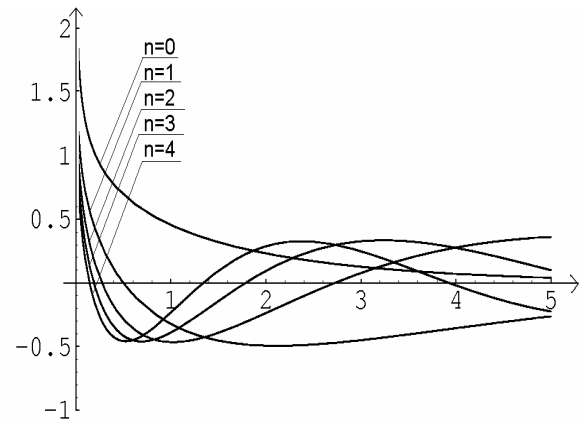


Рис.2.4.6. Ортонормированные функции из семейства Сонина-Лагерра при $\alpha = -0.5$.

2.5. Полиномы и функции Эрмита

[Эрмит Шарль (Hermite Charles) (1822-1901) – французский математик, иностранный чл.-корр. и иностранный почетный член Петербургской АН, член Парижской АН, Лондонского королевского общества.]

Многочлены Эрмита являются ортогональными полиномами, заданными на всей вещественной оси $(-\infty, \infty)$, с экспоненциальной весовой функцией. Ее простейший вид

$$\rho(x) = \exp(-x^2). \quad (2.5.1)$$

Однако в приложениях к математической статистике более удобно использовать весовую функцию вида:

$$\rho(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad (2.5.1')$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями полиномов Эрмита $H_n(x)$, принятыми Сегё [22], как стандартизированными ортогональными многочленами, связанными с $a = -\infty$, $b = \infty$, $\rho(x) = \exp(-x^2)$; $X = 1$.

Им соответствует формула Родрига вида

$$H_n(x) = \frac{1}{(-1)^n e^{-x^2}} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \{e^{-x^2}\} = (-1)^n e^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}). \quad (2.5.2)$$

Рекуррентная формула

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \quad (2.5.3)$$

Явное выражение

$$H_n(x) = n! \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!}. \quad (2.5.4)$$

Частные случаи:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1; \\ H_1(x) &= 2x; \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2; \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x; \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12. \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Функции Эрмита $h_n(x)$ определяются следующим образом:

$$h_n(x) = H_n(x) \cdot \sqrt{\exp(-x^2)}. \quad (2.5.6)$$

Норма полиномов Эрмита

$$\|H_n(x)\| = \sqrt{2^n \cdot n! \sqrt{\pi}}. \quad (2.5.7)$$

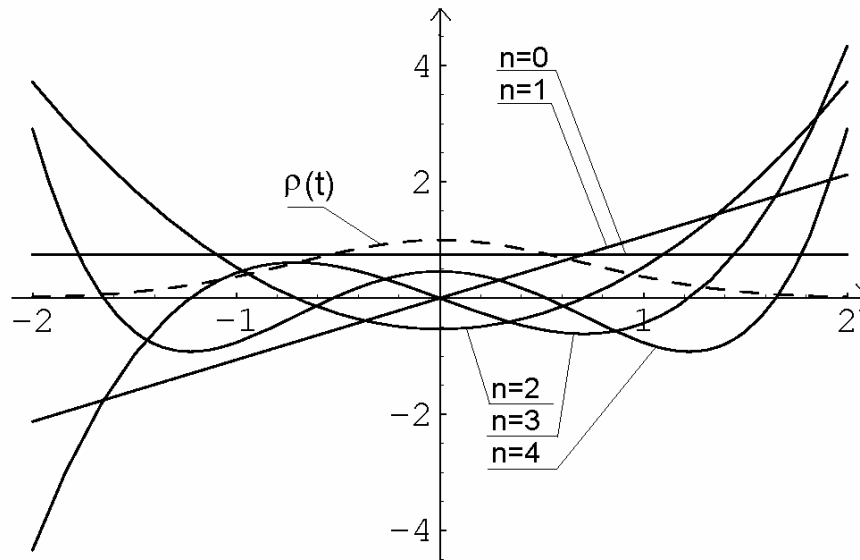


Рис. 2.5.1. Ортонормированные полиномы Эрмита $H_n(t)$ при $n=0(1)4$.

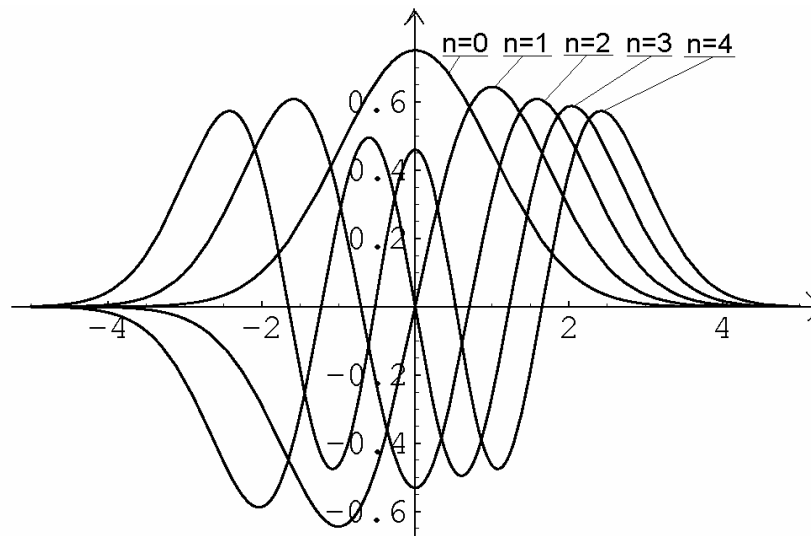


Рис. 2.5.2. Ортонормированные функции Эрмита $h_n(t)$ при $n=0(1)4$.

2.6. Произвольные полиномы и функции непрерывного аргумента из числа классических

В этом параграфе мы рассмотрим различные ортогональные системы (базисы), которые получаются, главным образом, из общих выражений базиса Якоби при произвольных значениях α и β в различных сочетаниях в пределах допустимых значений параметров α и β . Изучение указанных ортогональных систем позволяет сделать следующие важные выводы.

1. При решении типовых инженерных задач, когда требуется получить заданную точность аналитической аппроксимации различных сигналов выражением наименьшей

сложности следует так подбирать ортонормированные базисы для аналитического описания класса сигналов или даже для описания каждого конкретного сигнала, чтобы первые взвешенные полиномы или функции таких базисов были по форме близки к аппроксимируемым сигналам и процессам.

2. Параметры α и β могут изменяться в пределах $-1 < \alpha < \infty$ и $-1 < \beta < \infty$, следовательно, число возможных сочетаний α и β не ограничено. Поэтому практически всегда имеется возможность согласовывать форму взвешенных полиномов или функций с формой поступающих на обработку сигналов.

В приложении 3 приведены графики взвешенных полиномов (функций) Якоби при $n = 0, 1, 2$ и различных сочетаниях значений α и β . Анализ характера изменений формы первых функций Якоби наглядно показывает широкие возможности по выбору соответствующего базиса при аналитическом описании информационных массивов с высокой точностью наиболее коротким отрезком ортогонального базиса вплоть до одного члена. Таким образом, при описании данных на ЭВМ в автоматическом режиме следует предусмотреть ряд адаптивных процедур, чтобы наилучшим образом решать поставленные задачи аналитического описания информационных массивов данных.

Следует подчеркнуть, что использование нелинейной подстановки в классических ортогональных базисах (главным образом в базисах Якоби) переводит их область существования на промежуток $(0, \infty)$ и существенно меняет их форму. Этим самым существенно расширяется ассортимент ортогональных систем полиномов и функций, заданных на промежутке $(0, \infty)$, что также расширяет возможности эффективного аналитического описания данных.

Ортогональные полиномы и функции из семейства Сонина-Лагерра задаются следующей явной формулой [23]:

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!} \quad (2.6.1)$$

и соответствующей весовой функцией:

$$\rho(x) = x^\alpha \cdot e^{-x}, \quad (2.6.2)$$

в которых параметр α задается в пределах $-1 < \alpha < \infty$, что также при различных значениях α приводит к новым ортогональным системам с различными свойствами. Кроме того, целесообразно ввести в формулы (2.6.1-2.6.2) масштабный коэффициент m . В приложении 4 приведены примеры изменения весовой функции базиса Сонина-Лагерра при вариации параметров α и m .

Рассмотрим некоторые характерные случаи.

При $\alpha = 0$, полиномы Сонина-Лагерра и их весовая функция сводятся к обычным полиномам Лагерра. При произвольном α в заданных пределах, полиномы и функции существенно меняют свои свойства.

Важно отметить появление широкого круга задач, в которых требуется высокая точность аппроксимации сложных процессов и сигналов с весьма большой глубиной, когда требуется вычисление сотен и даже тысяч коэффициентов разложения.

Решение подобных задач требует проведения специальных исследований по выявлению внутренних свойств отдельных базисов, точность вычисления коэффициентов разложения которых с ростом глубины разложения существенно не меняется и остается в приемлемых пределах.

В дальнейшем изложении мы рассмотрим подобные базисы и дадим рекомендации по их использованию.

2.7. Вычисление коэффициентов разложения с помощью квадратурных формул

В этом параграфе рассматривается задача вычисления коэффициентов разложения эмпирических данных или результатов численного эксперимента по одной из систем классических ортогональных функций непрерывного аргумента. Основное внимание при этом уделяется теоретическому фундаменту, необходимому для построения алгоритмов вычисления коэффициентов разложения.

Предположим, что эмпирические данные представляют собой функцию, заданную в виде таблицы значений на некоторой системе отсчетов:

$$\{a(x_1), a(x_2), \dots, a(x_M)\}. \quad (2.7.1)$$

Функция $a(x)$ вида (2.7.1) представляет собой сеточную функцию, или функцию дискретного аргумента $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$.

Пространство функций дискретного аргумента вида (2.7.1) обозначим V_M . Элементами этого пространства являются векторы, компонентами которых являются конечные последовательности значений функции в узлах некоторой сетки. Очевидно, векторное пространство V_M однозначно определяется посредством фиксирования сетки. Векторное пространство V_M является евклидовым, если определено скалярное произведение.

Во многих задачах обработки экспериментальных данных представление (2.7.1) является исходным, и по нему необходимо получить численно-аналитическое представление в виде отрезка ряда:

$$a(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \phi_k(x). \quad (2.7.2)$$

Функции $a(x)$ вида (2.7.2) являются функциями непрерывного аргумента и образуют линейное пространство, натянутое на конечное число базисных функций $\{\phi_k(x)\}$. Обозначим это пространство E_N . Можно считать, что E_N также векторное пространство. Элементами этого пространства являются векторы, компонентами которых являются конечные последовательности значений коэффициентов разложения $\{a_k\}$. Будем также кратко называть E_N пространством коэффициентов разложения.

Таким образом, основная задача состоит в том, чтобы элементу из пространства V_M поставить в соответствие элемент пространства E_N . Для решения этой задачи необходимо рассмотреть следующие вопросы:

- преобразование функции дискретного аргумента в функцию непрерывного аргумента;
- замена интеграла скалярного произведения суммированием на конечной системе отсчетов.

Обозначенные вопросы вносят произвол в процесс вычисления коэффициентов разложения. Первый вопрос осуществляется посредством интерполяции и, возможно, экстраполяции данных. Второй вопрос, напротив, связан с дискретизацией функций непрерывного аргумента на некоторой сетке. Если первая проблема может быть решена выбором одного из нескольких возможных методов интерполяции, то вторая проблема подвержена жесткому требованию сохранения ортогональности системы базисных функций при дискретизации области их определения. При приближенном вычислении интегралов на некоторой сетке ортогональность базисных функций, вообще говоря, нарушается, а при разложении по системе неортогональных функций коэффициенты разложения не могут быть вычислены по обычным формулам.

Рассмотрим пространства V_K и E_K одинаковой размерности. Между этими пространствами можно определить взаимно однозначное соответствие с сохранением скалярного произведения (изоморфизм). Следующие три определения скалярного произведения в пространствах V_K и E_K эквивалентны:

$$(a(x), b(x)) = \int_D a(x)b(x)\rho(x)dx, \quad (2.7.3)$$

$$(\{a_j\}, \{b_j\}) = \sum_{j=0}^{K-1} a_j b_j, \quad (2.7.4)$$

$$(\{a(x_j)\}, \{b(x_j)\}) = \sum_{j=1}^K a(x_j)b(x_j)w_j. \quad (2.7.5)$$

Для классических полиномов и функций равенство между интегралом (2.7.3) и суммой (2.7.5) обеспечивается специальным выбором узлов x_i и весов w_i , как это следует из теории квадратурных формул Гаусса. В зависимости от рассматриваемой весовой функции соответствующие квадратурные формулы называются формулами Гаусса-Лежандра, Гаусса-Лагерра, Гаусса-Чебышева и т.д. Фундаментальный результат теории квадратурных формул устанавливает, что при специальном выборе узлов и весов (общее число параметров квадратурной формулы $2K$) можно удовлетворить условию, чтобы квадратурная формула была точна для подынтегральной функции, представляющей собой многочлен степени не выше $2K-1$, умноженный на весовую функцию, что заведомо выполняется, если $a(x)$ и $b(x)$ являются полиномами степени не выше $K-1$. Доказано, что узлы квадратурной формулы являются нулями ортогонального многочлена $p_K(x)$, соответствующего заданной весовой функции, а веса находятся по формулам:

$$w_j = \frac{a_K(p_{K-1}(x), p_{K-1}(x))}{a_{K-1}p'_K(x_j)p_{K-1}(x_j)}, \quad (2.7.6)$$

где a_K - коэффициент при старшей степени полинома $p_K(x)$.

Таким образом, смысл квадратурных формул Гаусса в теории ортогональных разложений состоит в том, что они позволяют классической ортогональной системе функций непрерывного аргумента поставить в соответствие ортогональную систему функций дискретного аргумента (на неравномерной сетке).

Рассмотрим теперь вопросы численной реализации алгоритма вычисления коэффициентов разложения, основанного на неравномерной дискретизации базисных функций. Для этого необходимо решить несколько задач. Первая задача заключается в устойчивом и как можно более точном вычислении базисных функций. Вторая задача состоит в вычислении узлов и весов квадратурной формулы. Для полиномов Чебышёва узлы и веса известны аналитически, для остальных базисов их необходимо находить с помощью вычислительных методов. После решения этих двух задач правомерно встает вопрос, насколько знак равенства между интегралом и суммой имеет место с практической точки зрения при выполнении приближенных вычислений. Для контроля

погрешности удобно использовать ошибку вычисления элементов матрицы Грама в логарифмическом масштабе

$$\lg |(\phi_i(x), \phi_j(x)) - I|, \quad (2.7.7)$$

где I - единичная матрица.

Общая схема получения элемента пространства E_N по элементу пространства V_M приобретает следующий вид

$$E_N \subset E_K \leftrightarrow V_K \leftarrow V_M. \quad (2.7.8)$$

Эта схема содержит параметр K - размерность промежуточных пространств. Кроме того, отображение из V_M в V_K можно производить, варьируя метод интерполяции. Размерность промежуточных пространств K должна быть выбрана с учетом того, чтобы не происходило потери информации при переходе из пространства V_M в пространство V_K . Определение элемента пространства E_K производить не обязательно, а вычислять лишь компоненты вектора коэффициентов, принадлежащего пространству E_N при $N < K$, что соответствует проектированию на подпространство меньшей размерности.

Вопросы и упражнения

1. Почему проблема интерполяции неизбежно возникает при вычислении коэффициентов разложения эмпирических данных?
2. Определить оператор отображения из V_M в V_K на основе линейной интерполяции. Описать структуру матрицы этого оператора и уметь вычислить ненулевые элементы этой матрицы.
3. В чем состоит особая роль квадратурных формул Гаусса в теории классических ортогональных полиномиальных базисов непрерывного аргумента?
4. Почему необходимо проверять ортогональность вычисляемых базисных функций и какая величина удобна для контроля ортогональности базисных функций?
5. Является ли ортогональная система функций дискретного аргумента, полученная в результате дискретизации функций непрерывного аргумента на гауссовой сетке, классической?

Глава III. Классические ортогональные полиномы и функции дискретного аргумента.

3.1 Общие сведения. Свойства ортогональности

Как уже отмечалось в 1.3, в общем виде скалярное произведение в L^2 определяется интегралом Стильтьеса (Стильтьес Томас Иоаннес, нидерландский математик (1856-1894), член-корреспондент Петербургской АН):

$$(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \int_a^b \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t) d\alpha(t), \quad (3.1.1)$$

где $\alpha(t)$ - неубывающая функция. Если $\alpha(t)$ абсолютно непрерывная функция, то (3.1.1) сводится к $\rho(t) = \alpha'(t)$.

Если же $\alpha(t)$ является функцией скачков и имеет скачки величины j_i в точках $t = t_i$, то интеграл сводится к сумме, которая определяет скалярное произведение функций дискретного аргумента:

$$(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \sum_i \varphi_1(t_i) \varphi_2(t_i) j(t_i). \quad (3.1.2)$$

Приведенное определение скалярного произведения относится к вещественным функциям дискретного вещественного аргумента [23], с которыми мы будем в дальнейшем работать.

Следует подчеркнуть, что функция скачков положительна, причем $\sum_i j(t_i)$ конечна, а точки t_i являются целыми $a \leq t_i \leq b$ и равномерно отстоящими друг от друга, то есть заданы на равномерной сетке.

В таблице 3.1.1 приведены ортогональные многочлены, соответствующие классическим ортогональным многочленам дискретной переменной. Они имеют много общих свойств. Для этих многочленов справедлива формула, представляющая собой конечно-разностный аналог формулы Родрига:

$$y_n(t) = \frac{\Delta^n [j(t-n) \cdot X(t) \cdot X(t-1) \dots X(t-n+1)]}{K_n \cdot j(t)}, \quad (3.1.3)$$

где K_n - постоянные, $X(t)$ - многочлен от t , коэффициенты которого не зависят от n ,

Δ - разностный оператор вида

$$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t), \quad \Delta^{n+1} f(t) = \Delta[\Delta^n f(t)], \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.1.4)$$

Рассмотренные свойства (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4) характеризуют указанные в таблице ортогональные многочлены в том смысле, что любая система ортогональных многочленов дискретного аргумента, для которой справедлива формула Родрига (3.1.3) может быть сведена к одной из перечисленных в таблице классических ортогональных систем дискретного аргумента.

Линейно-независимые функции дискретного аргумента $\{\varphi_n(t_i)\}$ образуют ортогональную систему, если их скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$(\varphi_n(t_i), \varphi_m(t_i)) = \sum_i \varphi_n(t_i) \cdot \varphi_m(t_i) j(t_i) = 0, \quad \text{при } n \neq m. \quad (3.1.5)$$

Любая ортогональная система функций $\{\bar{\varphi}_n(t_i)\}$ может быть нормирована, если функции входящие в систему нормировать, заменив $\bar{\varphi}_n(t_i)$ на $\varphi_n(t_i) = \frac{\bar{\varphi}_n(t_i)}{\|\bar{\varphi}_n(t_i)\|}$, где

$$\|\bar{\varphi}_n(t_i)\| = \sqrt{\sum_{t=0}^{T-1} \bar{\varphi}_n(t_i) \bar{\varphi}_n(t_i) j(t_i)}, \quad (3.1.6)$$

где $\varphi_n(t)$ - ортогональный и нормированный полином,

$\bar{\varphi}_n(t)$ - ортогональный ненормированный полином.

Функции $\{\varphi_n(t_i)\}$ образуют ортонормированную систему, если

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n \\ 1, & \text{если } n = m. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

Таблица 3.1.1. Классические ортогональные полиномы дискретного аргумента

| | Название многочлена (функции) | Обозначение | Формула Родрига | Вес $j(t)$ (функция скачков) | Норма $\ y_n(t)\ = \sqrt{d_n^2}$ | Промежуток существования |
|---|-------------------------------------|----------------------------|--|---|--|--------------------------|
| 1 | Полиномы Хана (обобщенные Чебышева) | $H_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ | $\frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{j(t)} \Delta^n \left[j(t) \prod_{k=0}^{n-1} \sigma(t-k) \right]$ $\sigma(t) = t(T + \alpha - t)$ | $\frac{\Gamma(T + \alpha - t)\Gamma(\beta + 1 + t)}{\Gamma(t + 1)\Gamma(T - t)}$ $(\alpha > -1, \beta > -1)$ | $\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\beta + n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)_T}{(\alpha + \beta + 2n + 1)n!(T - n - 1)!}}$ | $[0, T - 1]$ |
| 2 | Функции Хана | $h_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ | $H_n^{(\alpha, \beta)}(t) \sqrt{j(t)}$ | 1 | - “ - | $[0, T - 1]$ |
| 3 | Полиномы (функции) Чебышева | $\Theta_n(t)$ | $\frac{(-1)^n}{n!} \Delta^n \left[\frac{\Gamma(T - t)\Gamma(n + 1 + t)}{\Gamma(T - n - t)\Gamma(t + 1)} \right]$ | 1 | $\sqrt{\frac{T(T^2 - 1)(T^2 - 2^2) \dots (T^2 - n^2)}{2n + 1}}$ | $[0, T - 1]$ |
| 4 | Полиномы Кравчука | $K_n^{(p, q)}(t)$ | $\frac{(-1)^n q^n}{n!} \frac{1}{j(t)} \Delta^n \left[\frac{T! p^{t+n} q^{T-t-n}}{t!(T - t - n)!} \right]$ | $\frac{T!}{(T - t)! t!} p^t q^{T-t}$ $(p > 0, q > 0, p + q = 1)$ | $\sqrt{\frac{T!}{n!(T - t)!}} (pq)^{n/2}$ | $[0, T]$ |
| 5 | Функции Кравчука | $k_n^{(p, q)}(t)$ | $K_n^{(p, q)}(t) \sqrt{j(t)}$ | 1 | - “ - | $[0, T]$ |
| 6 | Полиномы Майкснера | $M_n^{(\beta, c)}(t)$ | $c^{-n} \frac{1}{j(t)} \Delta^n \left[c^{t+n} \frac{\Gamma(n + \beta + t)}{\Gamma(\beta)\Gamma(t + 1)} \right]$ | $\frac{c^t (\beta)_t}{t!}$ $(\beta > 0, 0 < c < 1)$ | $\sqrt{\frac{n! (\beta)_n}{(1 - c)^\beta c^n}}$ | $[0, \infty)$ |
| 7 | Функции Майкснера | $m_n^{(\beta, c)}(t)$ | $M_n^{(\beta, c)}(t) \sqrt{j(t)}$ | 1 | - “ - | $[0, \infty)$ |
| 8 | Полиномы Шарлье | $C_n^{(m)}(t)$ | $m^n \frac{1}{j(t)} \Delta^n \left[\frac{1}{m^{\sqrt{t}} e m^{t+n} t!} \right]$ | $\frac{1}{m^{\sqrt{t}} e \cdot m^t t!}; (m > 0)$ | $\sqrt{m^n n!}$ | $[0, \infty)$ |
| 9 | Функции | $c_n^{(m)}(t)$ | $C_n^{(m)}(t) \sqrt{j(t)}$ | 1 | - “ - | $[0, \infty)$ |

| | | | | | |
|--------|--|--|--|--|--|
| Шарлье | | | | | |
|--------|--|--|--|--|--|

3.2. Полиномы Чебышёва дискретного аргумента

Для полиномов Чебышёва дискретного аргумента принято обозначение $\theta_n(t)$, где t - дискретный аргумент на равномерной сетке, промежуток существования $[0, T-1]$.

Полиномы определяются дискретным аналогом формулы Родрига

$$\theta_n(t) = n! \Delta^n \left[\binom{t}{n} \binom{t-T}{n} \right]. \quad (3.2.1)$$

Функция скачков

$$j(t) = 1. \quad (3.2.2)$$

Норма ортогональных полиномов Чебышёва имеет вид:

$$\|\theta_n(t)\| = \sqrt{\frac{T(T^2 - 1^2)(T^2 - 2^2) \dots (T^2 - n^2)}{2n + 1}}. \quad (3.2.3)$$

Рекуррентная формула:

$$(n + 1)\theta_{n+1}(t) = (2n + 1)(2t - T + 1)\theta_n(t) - n(T^2 - n^2)\theta_{n-1}(t). \quad (3.2.4)$$

Частные значения

$$\theta_0(t) = 1;$$

$$\theta_1(t) = 1 - T + 2t;$$

$$\theta_2(t) = (1 - T) + (1 - T)^2 + 6(1 - T)t + 6t^2;$$

$$\theta_3(t) = 2(1 - T) + 3(1 - T)^2 + (1 - T)^3 + 2[2 + 3(1 - T) + 6(1 - T)^2]t + 30(1 - T)t^2 + 20t^3.$$

Функция дискретного аргумента $f(t)$ разлагается в ряд по полиномам Чебышёва по формуле

$$A_n = \sum_{t=0}^{T-1} f(t) \cdot \theta_n(t). \quad (3.2.5)$$

Формула восстановления $f(t)$

$$f(t) = \sum_{n=0}^N A_n \theta_n(t), \quad (3.2.6)$$

где $\theta_n(t)$ - нормированные полиномы Чебышёва.

На рисунках 3.1.1.(a) и 3.1.1.(b) приведены функция скачков и графики полиномов Чебышева.

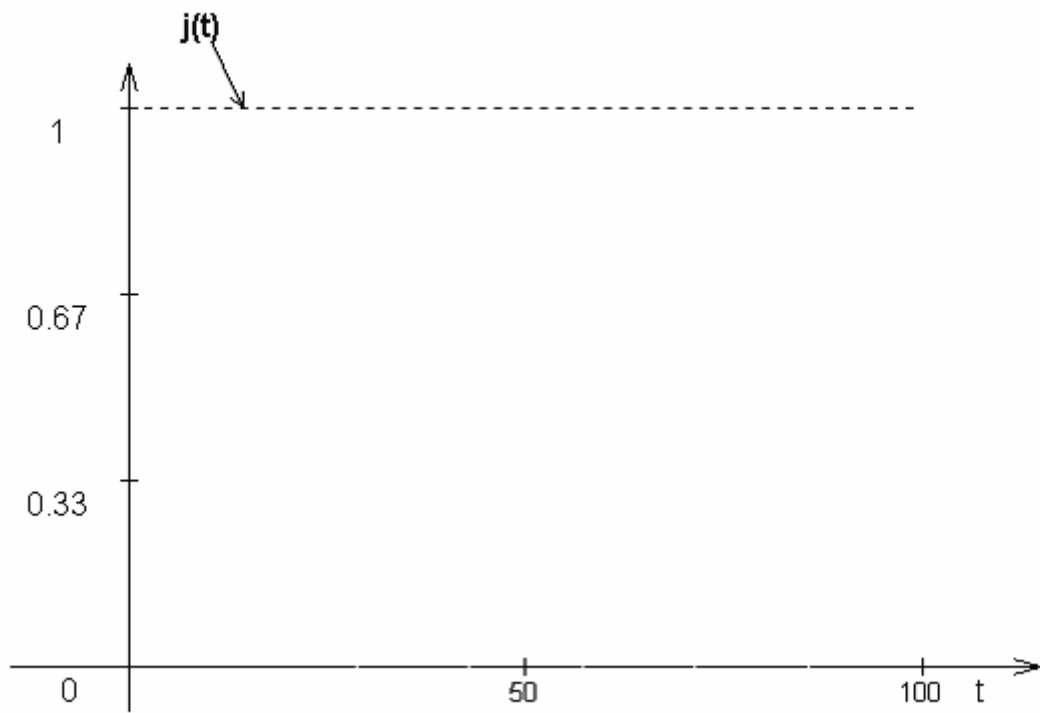


Рис. 3.1.1 (а). Функция скачков $j(t)$ базиса Чебышева дискретного аргумента $\theta_n(t)$.

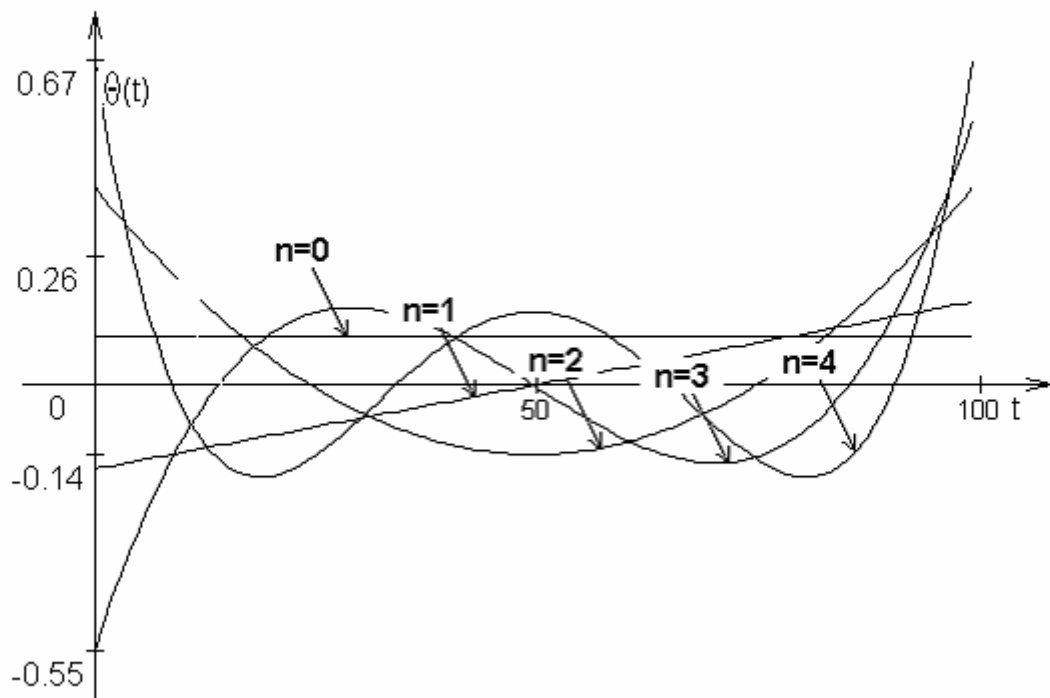


Рис. 3.1.1 (b) Полиномы Чебышева дискретного аргумента $\theta_n(t)$ $n = 0(1)4$ при $T=100$.

3.3. Полиномы семейства Майкснера

Обозначение $M_n^{(\beta,c)}(t)$, промежутков существования $(0, \infty)$, постоянные: $\beta > 0, 0 < c < 1$.

Полиномы определяются дискретным аналогом формулы Родрига

$$M_n^{(\beta,c)}(t) = \frac{t! \Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+t)} c^{-n-t} \cdot \Delta^n \left[c^t \frac{\Gamma(\beta+t)}{(t-n)! \Gamma(\beta)} \right]. \quad (3.3.1)$$

Функция скачков:

$$j(t) = \frac{c^t (\beta)_t}{t!} = \frac{c^t \cdot \Gamma(\beta+t)}{t! \Gamma(\beta)}. \quad (3.3.2)$$

Норма полиномов Майкснера

$$\|M_n^{(\beta,c)}(t)\| = \sqrt{\frac{n! c^t (\beta+t-1)}{(\beta-1)! t!}}. \quad (3.3.3)$$

Рекуррентная формула

$$M_{n+1}^{(\beta,c)}(t) = \frac{1}{c} (tc - t + n + nc + c\beta) M_n^{(\beta,c)}(t) - \frac{1}{c} n(n-1 + \beta) M_{n-1}^{(\beta,c)}(t). \quad (3.3.4)$$

Частные значения:

$$M_0^{(\beta,c)}(t) = 1;$$

$$M_1^{(\beta,c)}(t) = \beta + \left(1 - \frac{1}{c}\right);$$

$$M_2^{(\beta,c)}(t) = \beta(\beta+1) + \left(1 + 2\beta - \frac{2\beta}{c} - \frac{1}{c^2}\right)t + \left(1 - \frac{1}{c}\right)^2 t^2;$$

$$M_3^{(\beta,c)}(t) = \beta(\beta+1)(\beta+2) + \left(2 + 6\beta + 3\beta^2 - \frac{6}{c}\beta - \frac{6}{c}\beta^2 - \frac{3}{c^2} - \frac{2}{c^3}\right)t + \left(3 + 3\beta - 12\frac{\beta}{c} - \frac{6}{c^2} + 3\frac{\beta}{c^2} + \frac{3}{c^3}\right)t^2 + \left(1 - \frac{6}{c} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^3}\right)t^3.$$

Графики полиномов и функций Майкснера приведены на рис. 3.3.1-3.3.5.

Часто используются функции Майкснера - $m_n^{(\beta,c)}(t)$, которые получаются из полиномов следующим образом

$$m_n^{(\beta,c)}(t) = M_n^{(\beta,c)}(t) \cdot \sqrt{\frac{c^t \cdot \Gamma(\beta+t)}{t! \Gamma(\beta)}}. \quad (3.3.5)$$

Для функций Майкснера функция скачков $j(t) \equiv 1$.

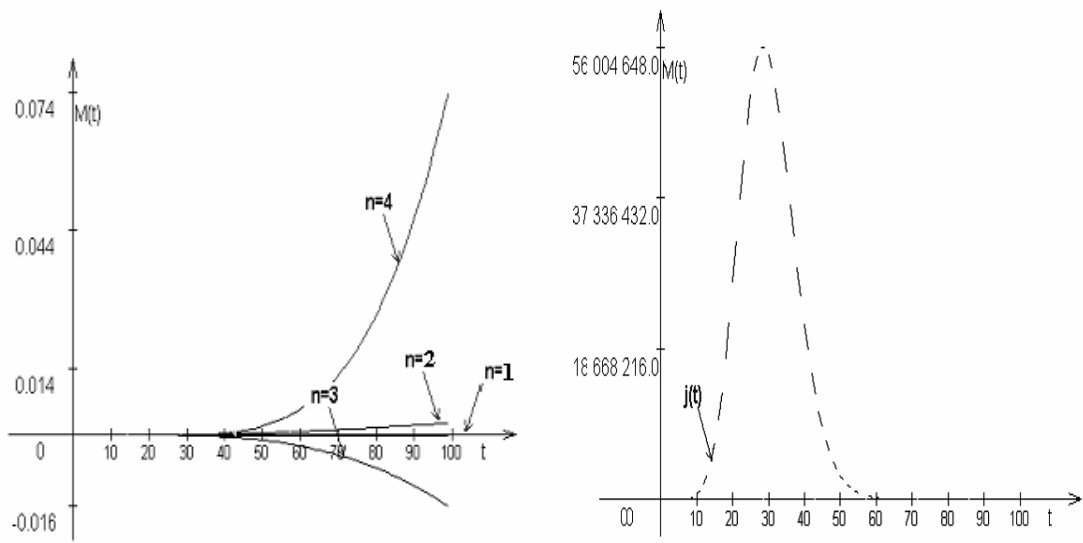


Рис. 3.3.1 (а). Полиномы Майкснера и их функции скачков при $n=0..4$, $T=100$, $c = 0,5$, $\beta = 0.033$.

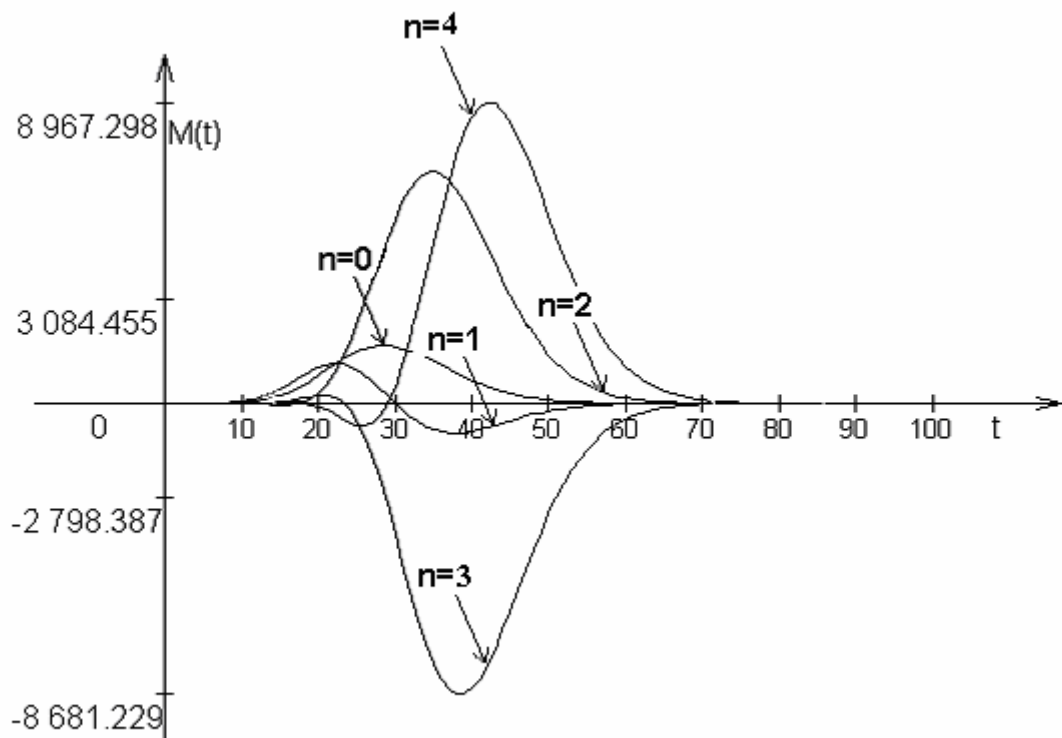


Рис. 3.3.1 (б). Функция Майкснера при $n=0(1)4$, $T=100$, $c = 0,5$, $\beta = 0.033$.

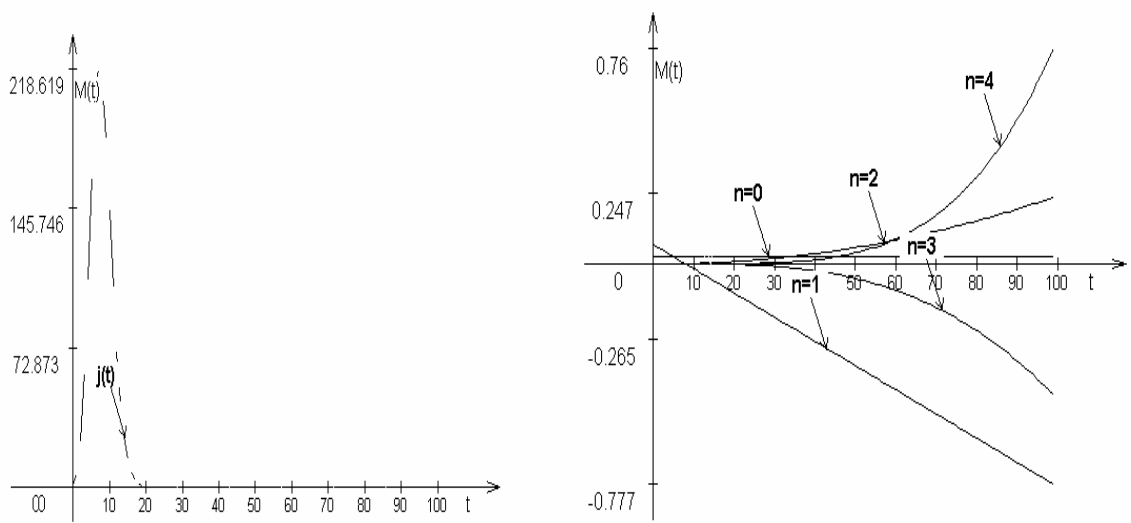


Рис. 3.3.2 (а). Полиномы Майкснера и их функции скачков при $n=0(1)4$, $T=100$, $c = 0,014$, $\beta = 0.1$

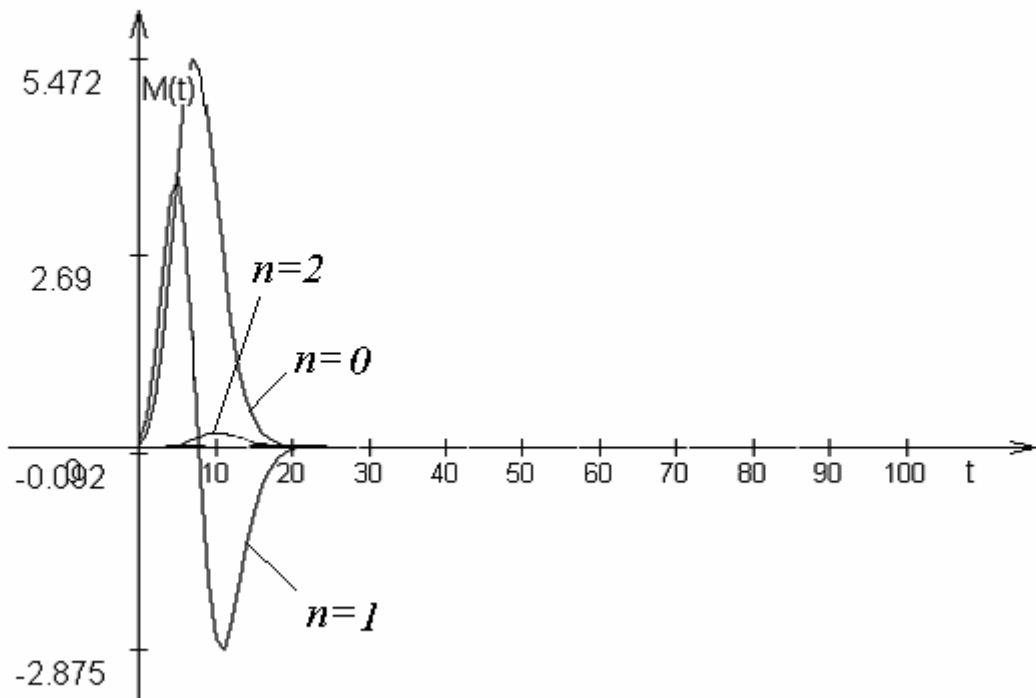


Рис. 3.3.2 (b). Функция Майкснера при $n=0(1)2$, $T=100$, $c = 0,014$, $\beta = 0,1$.

Вычисление коэффициентов разложения функции $f(t)$ по ортонормированным полиномам $M_n^{(\beta,c)}(t)$ выполняется по формуле:

$$D_n = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) M_n^{(\beta, c)}(t) \cdot \frac{c^t n! \Gamma(\beta + t)}{t! \Gamma(\beta)}, \quad (3.3.6)$$

где $M_n^{(\beta, c)}(t)$ - ортонормированные полиномы.

Восстановление функции $f(t)$ при этом производится по формуле

$$f(t) = \sum_{n=0}^N D_n \cdot M_n^{(\beta, c)}(t). \quad (3.3.7)$$

Если разложение $f(t)$ осуществляется по функциям Майкснера, то коэффициенты разложения вычисляются так:

$$E_n = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) \cdot m_n^{(\beta, c)}(t) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) M_n^{(\beta, c)}(t) \cdot \sqrt{\frac{c^t n! \Gamma(\beta + t)}{t! \Gamma(\beta)}}. \quad (3.3.8)$$

В этом случае восстановление $f(t)$ выполняется по формуле

$$f(t) = \sum_{n=0}^N E_n \cdot m_n^{(\beta, c)}(t). \quad (3.3.9)$$

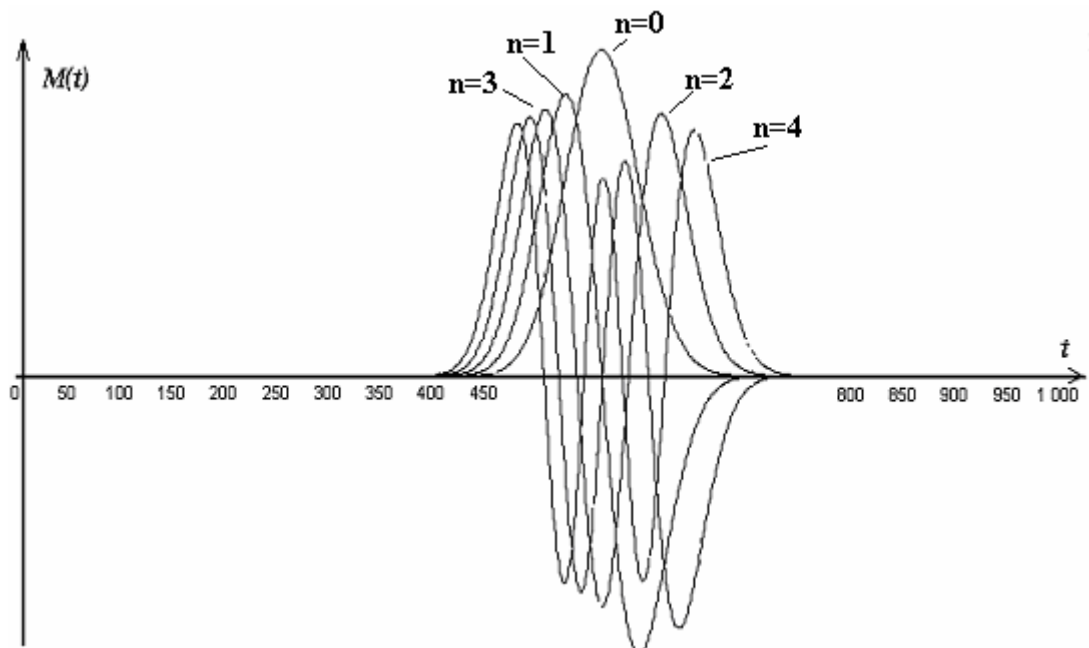


Рис. 3.3.3 Функция Майкснера при $n=0(1)4$, $T=1000$, $\beta = 0.0002$, $c = 0,1$.

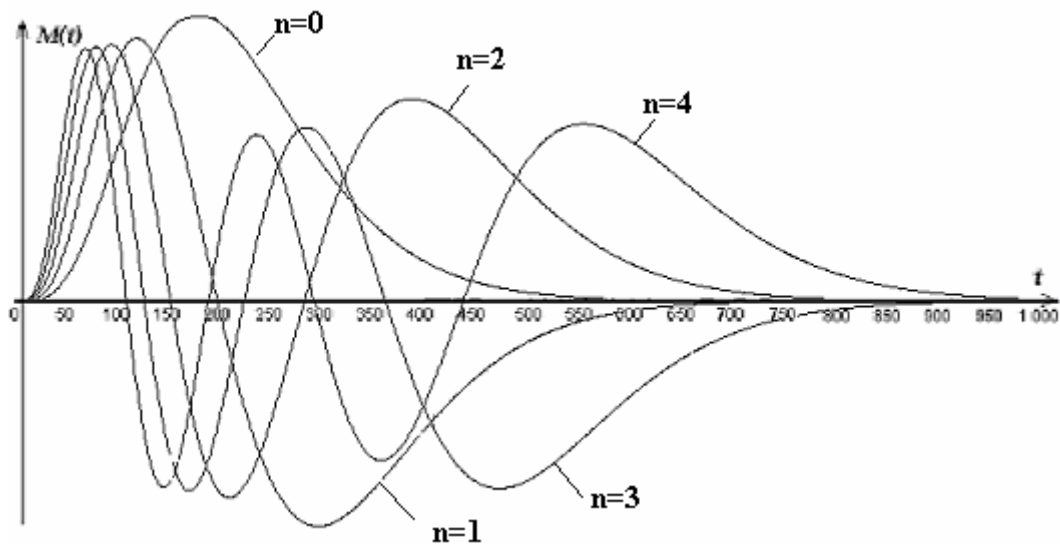


Рис. 3.3.4 Функции Майкснера при $n=0(1)4$, $T=1000$, $\beta = 0.1$, $c = 0,95$.

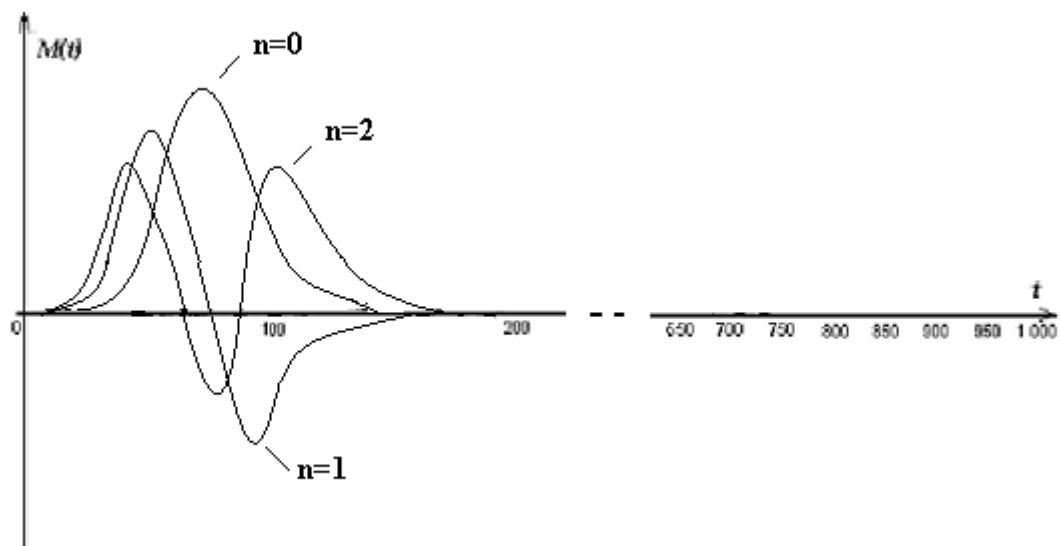


Рис. 3.3.5 Функции Майкснера при $n=0(1)4$, $T=1000$, $\beta = 0.2$, $c = 0,5$.

3.4. Полиномы семейства Кравчука

Эти полиномы были введены Кравчуком в 1929 году в связи с биномиальным распределением в теории вероятностей. Обозначают $K_n^{p,q}(t)$, они заданы на промежутке $[0, T]$, постоянные $p > 0$, $q > 0$ и $p + q = 1$.

Они определяются формулой Родрига (дискретным аналогом):

$$K_n^{p,q}(t) = \frac{(-1)^n \cdot t!(T-t)!}{n! p^t \cdot q^{T-t}} \cdot \Delta^n \left[\frac{p^t \cdot q^{T-t+n}}{(t-n)!(T-t)!} \right]. \quad (3.4.1)$$

Норма полиномов Кравчука

$$\|K_n^{p,q}(t)\| = \sqrt{\frac{T!}{n!(T-n)!}} \cdot (pq)^{n/2}. \quad (3.4.2)$$

Рекуррентное соотношение

$$(n-1)K_{n+1}^{p,q}(t) = [t-n-p(T-2n)]K_n^{p,q}(t) - pq(T-n+1)K_{n-1}^{p,q}(t). \quad (3.4.3)$$

Функция скачков

$$j(t) = \frac{T!}{(T-t)!t!} p^t \cdot q^{T-t}. \quad (3.4.4)$$

Частные значения

$$K_0^{p,q}(t) = 1;$$

$$K_1^{p,q}(t) = (p+q)t - Tp;$$

$$K_2^{p,q}(t) = \frac{p^2}{2}(T-t)(T-t-1) - pq(T-t)t + \frac{q^2}{2}t(t-1);$$

$$K_3^{p,q}(t) = \frac{p^3}{6}(T-t)(T-t-1)(T-t-2) + \frac{p^2q}{2}t(T-t)(T-t-1) - \frac{pq^2}{2}t(t-1)(T-t) + \frac{q^3}{6}(t-1)(t-2)t.$$

Графики нескольких первых полиномов, функций Кравчука и их функции скачков:

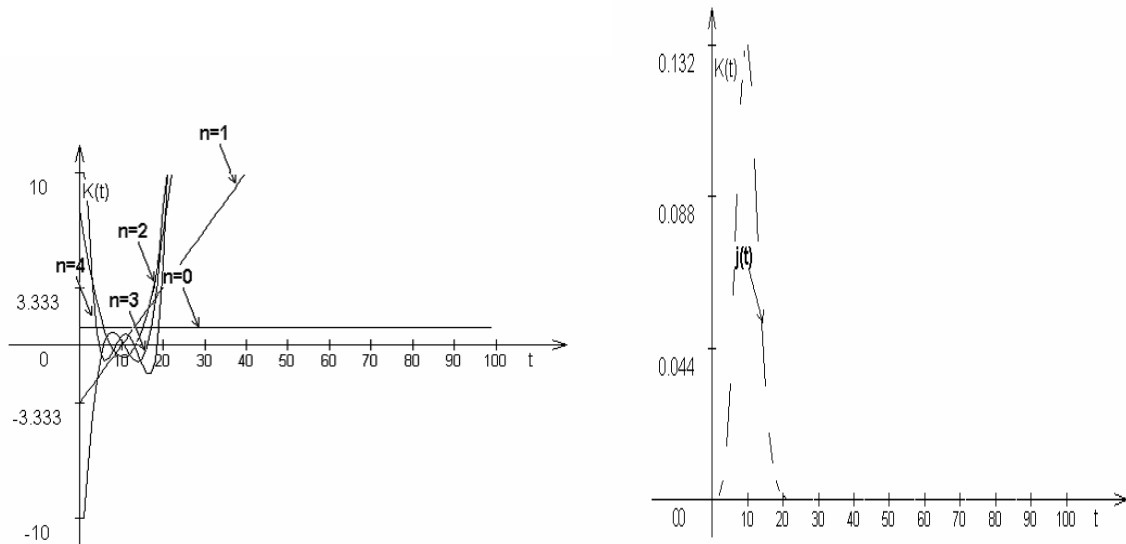


Рис. 3.4.1 (а) Нормированные полиномы Кравчука и функция скачков при $n=0(1)4$,
 $T = 100$, $p = 0,1$.

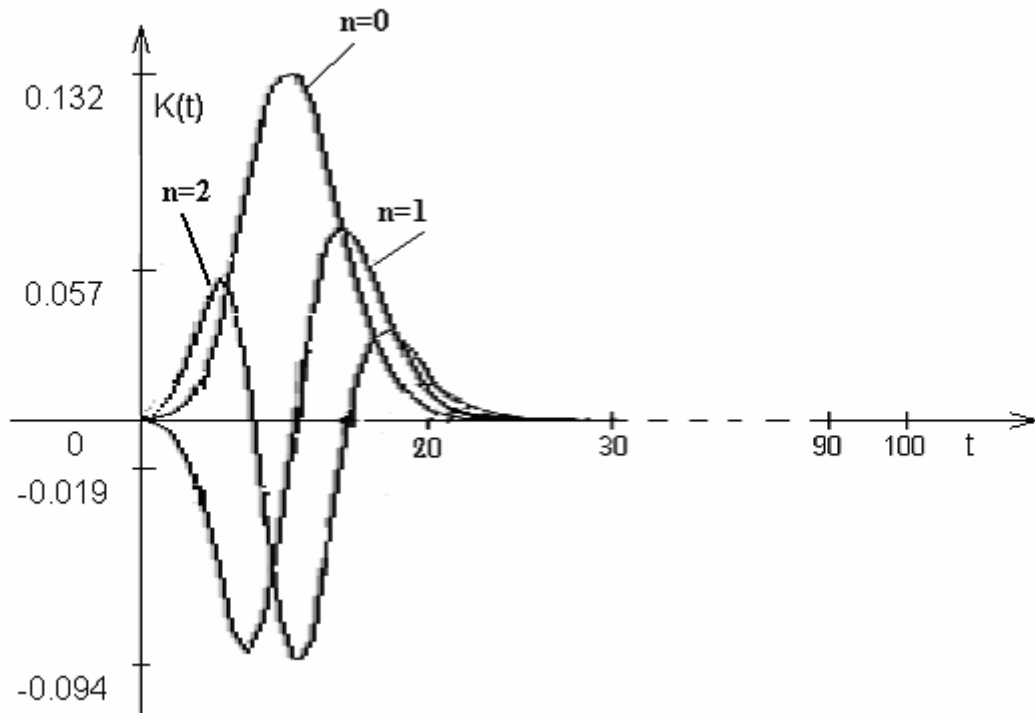


Рис. 3.4.1 (b) Нормированные функции Кравчука при $n=0(1)4$, $T = 100$, $p = 0.1$.

Формула вычисления коэффициентов разложения по полиномам Кравчука функции $f(t)$ имеет вид:

$$B_n = \sum_{t=0}^T f(t) K_n^{p,q}(t) \cdot \frac{T!}{(T-t)!t!} p^t \cdot q^{T-t}, \quad (3.4.5)$$

где $K_n^{p,q}(t)$ - ортонормированные полиномы Кравчука.

Формула восстановления $f(t)$

$$f(t) = \sum_{n=0}^N B_n K_n^{p,q}(t). \quad (3.4.6)$$

Функции Кравчука обозначают $k_n^{p,q}(t)$, их получают аналогично функциям Майкснера, то есть

$$k_n^{p,q}(t) = K_n^{p,q}(t) \cdot \sqrt{\frac{T!}{(T-t)!t!}} \cdot p^{0,5t} \cdot q^{0,5(T-t)}. \quad (3.4.7)$$

Разложение по функциям Кравчука функции $f(t)$ требует вычисления коэффициентов разложения по формуле

$$B_n = \sum_{t=0}^T f(t) \cdot k_n^{p,q}(t). \quad (3.4.8)$$

В этом случае восстановление $f(t)$ следует выполнить по формуле

$$f(t) = \sum_{n=0}^N B_n \cdot k_n^{p,q}(t) = \sum_{n=0}^N B_n \cdot K_n^{p,q}(t) \cdot \sqrt{\frac{T!}{(T-t)!t!}} \cdot p^{0,5t} \cdot q^{0,5(T-t)}. \quad (3.4.9)$$

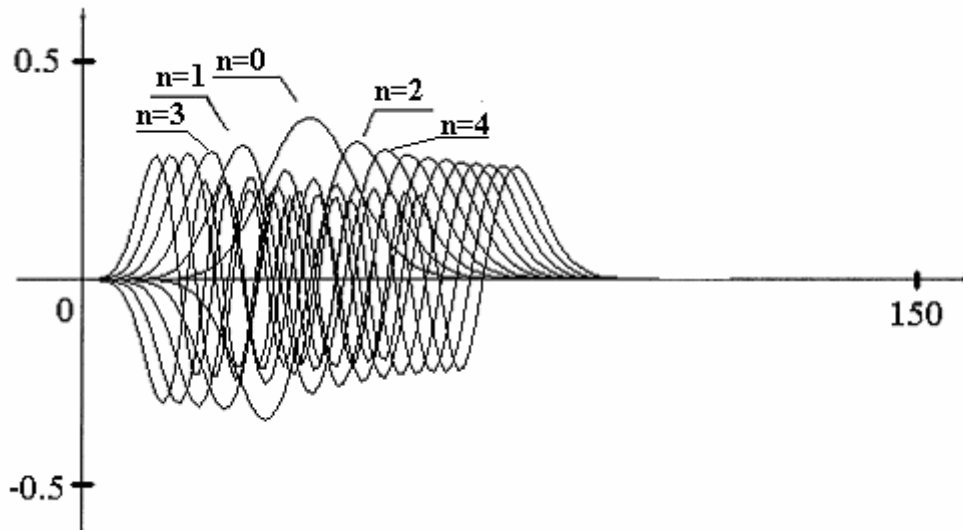


Рис. 3.4.2. Нормированные функции Кравчука при $p=1/4$, $T=150$.

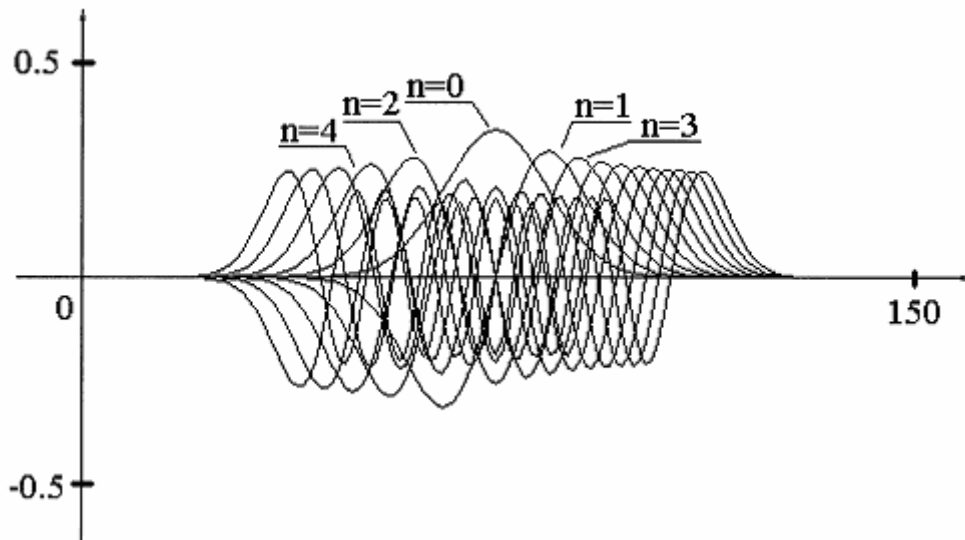


Рис. 3.4.3. Нормированные функции Кравчука при $p=1/2$, $T=150$.

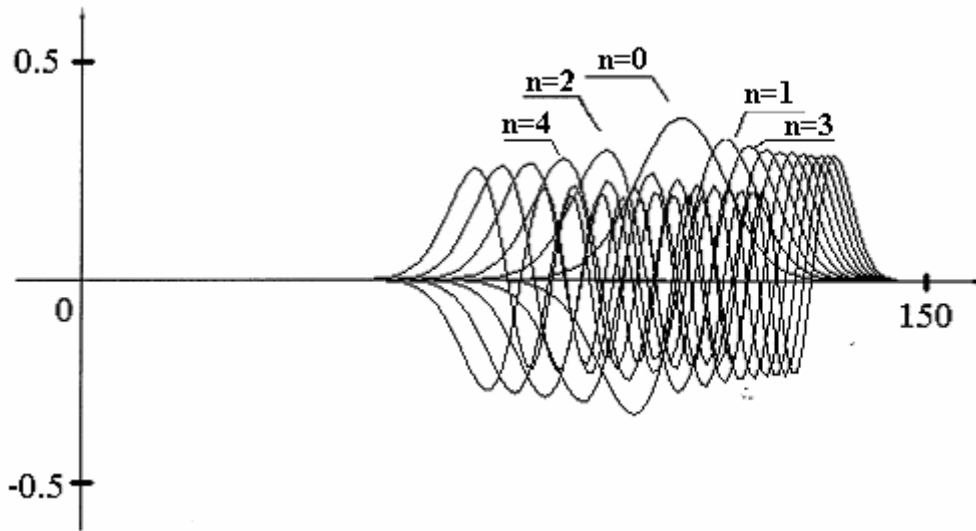


Рис. 3.4.4. Нормированные функции Кравчука при $p=3/4$, $T=150$.

3.5. Полиномы семейства Хана

[Австрийский математик Ханс Хан (Ганс Ган) (Hahn Hans) (1879-1934). Основные труды по теории функций и функциональному анализу, где известна теорема Хана-Банаха о возможности продолжения линейного функционала.]

Обозначение $H_n^{(\alpha, \beta)}(t)$, промежуток существования $[0, T - 1]$, постоянные:

$\alpha, \beta > -1$.

Полиномы определяются дискретным аналогом формулы Родрига:

$$H_n^{(\alpha, \beta)}(t) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{j(t)} \Delta^n \left[j(t) \prod_{k=0}^{n-1} \sigma(x-k) \right], \quad (3.5.1)$$

где

$$\sigma(t) = t(T + \alpha - t).$$

и функция скачков:

$$j(t) = \frac{\Gamma(T + \alpha - t)\Gamma(\beta + 1 + t)}{\Gamma(t + 1)\Gamma(T - t)}. \quad (3.5.2)$$

Норма полиномов Хана

$$\|H_n^{(\alpha, \beta)}\| = \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\beta + n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)_T}{(\alpha + \beta + 2n + 1)n!(T - n - 1)!}}. \quad (3.5.3)$$

Рекуррентная формула:

$$H_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(t) = \frac{1}{\alpha_n} \left((t - \beta_n) H_n^{(\alpha, \beta)}(t) - \gamma_n H_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(t) \right), \quad (3.5.4)$$

где

$$\alpha_n = \frac{(n+1)(\alpha + \beta + n + 1)}{(\alpha + \beta + 2n + 1)(\alpha + \beta + 2n + 2)},$$

$$\beta_n = \frac{\alpha - \beta + 2T - 2}{4} + \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(\alpha + \beta + 2T)}{4(\alpha + \beta + 2n)(\alpha + \beta + 2n + 2)},$$

$$\gamma_n = \frac{(\alpha + n)(\beta + n)(\alpha + \beta + T + n)(T - n)}{(\alpha + \beta + 2n)(\alpha + \beta + 2n + 1)}.$$

Частные значения:

$$H_0^{(\alpha, \beta)}(t) = 1;$$

$$H_1^{(\alpha, \beta)}(t) = \alpha + \beta + 2 - (\beta + 1)(T - 1)t;$$

$$H_2^{(\alpha, \beta)}(t) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 3)(\alpha + \beta + 4)t^2 - \frac{(\alpha + \beta + 3)(\alpha + \beta + 4)}{8(\alpha + \beta + 2)} \times$$

$$\times \left[4(\beta + 1)(T - 1) + (\alpha - \beta + 2T - 2)(\alpha + \beta + 2) + \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(\alpha + \beta + 2T)}{(\alpha + \beta + 4)} \right] t +$$

$$+ \frac{(\alpha + \beta + 3)(\alpha + \beta + 4)}{8(\alpha + \beta + 2)^2} (\beta + 1)(T - 1) \times$$

$$\times \left[(\alpha - \beta + 2T - 2)(\alpha + \beta + 2) + \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(\alpha + \beta + 2T)}{(\alpha + \beta + 4)} - \frac{4(\alpha + 1)(\alpha + \beta + T + 1)}{(\alpha + \beta + 3)} \right].$$

Графики полиномов и функций Хана приведены на рисунках 3.5.1 – 3.5.12.

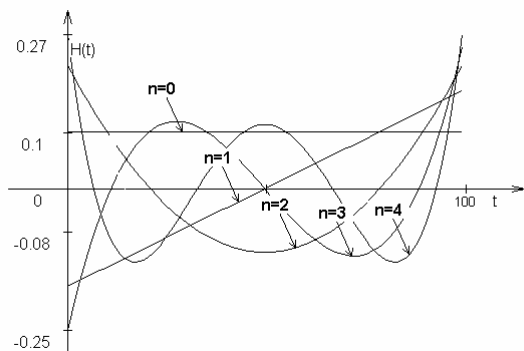


Рис. 3.5.1. Полиномы Хана порядков $n=0(1)4$ при $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $T=100$.

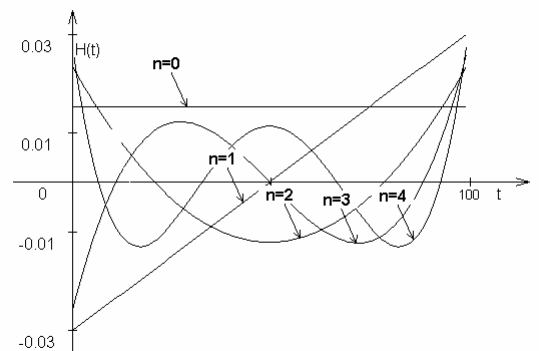


Рис. 3.5.2. Полиномы Хана порядков $n=0(1)4$ при $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $T=100$.

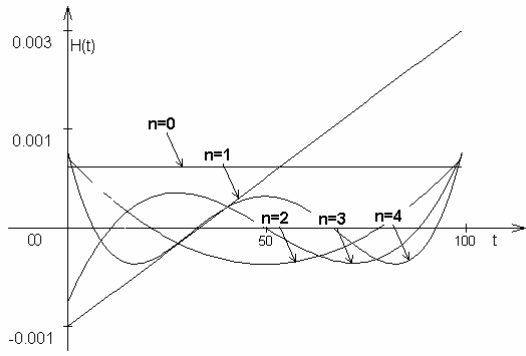


Рис. 3.5.3. Полиномы Хана порядков $n=0(1)4$ при $\alpha = 2, \beta = 0.5, T=100$.

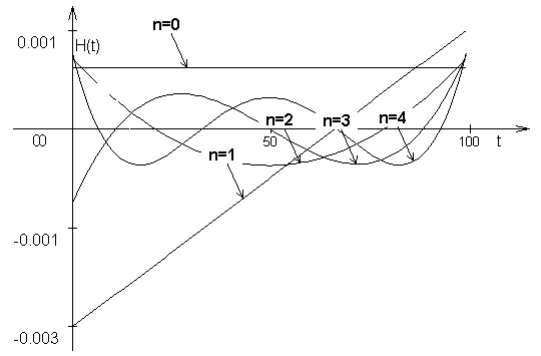


Рис. 3.5.4. Полиномы Хана порядков $n=0(1)4$ при $\alpha = 0.5, \beta = 2, T=100$.

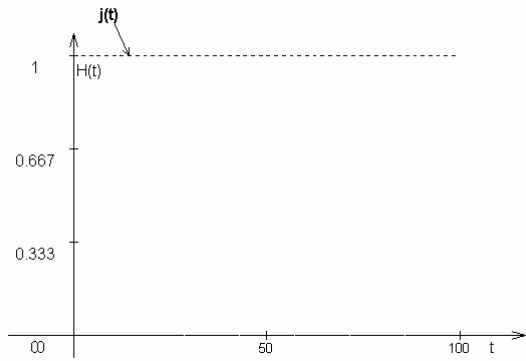


Рис. 3.5.5. Функция скачков Хана при $\alpha = 0, \beta = 0, T=100$.

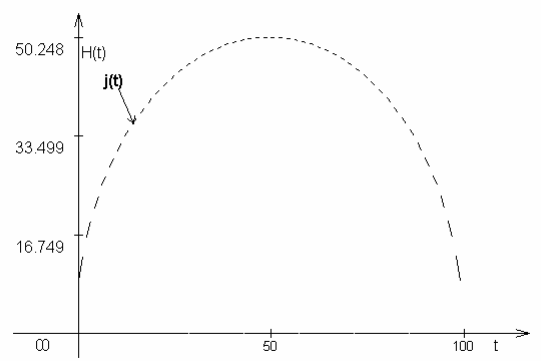


Рис. 3.5.6. Функция скачков Хана при $\alpha = 0.5, \beta = 0.5, T=100$.

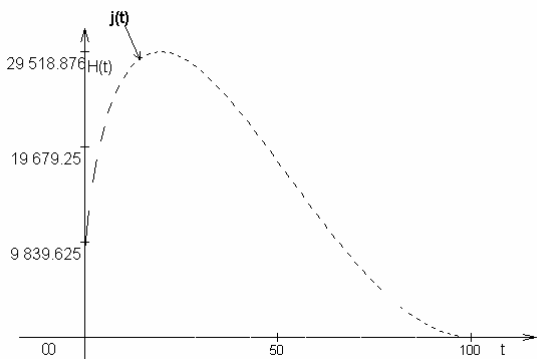


Рис. 3.5.7. Функция скачков Хана при $\alpha = 2, \beta = 0.5, T=100$.

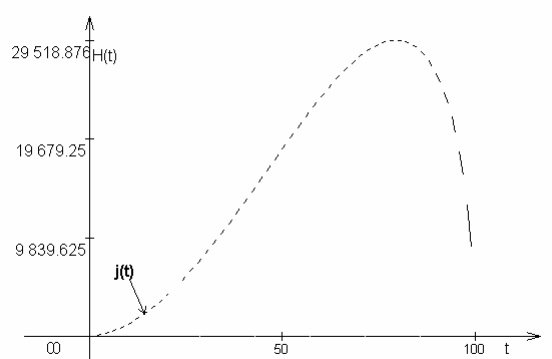


Рис. 3.5.8. Функция скачков Хана при $\alpha = 0.5, \beta = 2, T=100$.

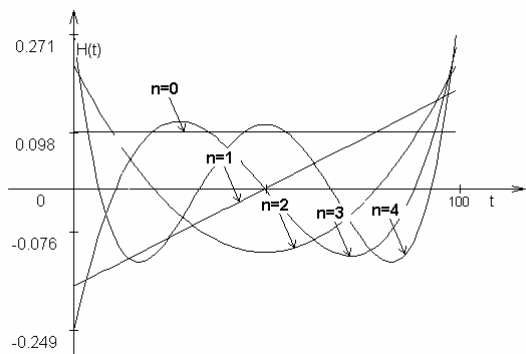


Рис. 3.5.9. Функции Хана порядков $n=0(1)4$ при $\alpha = 0, \beta = 0, T=100$.

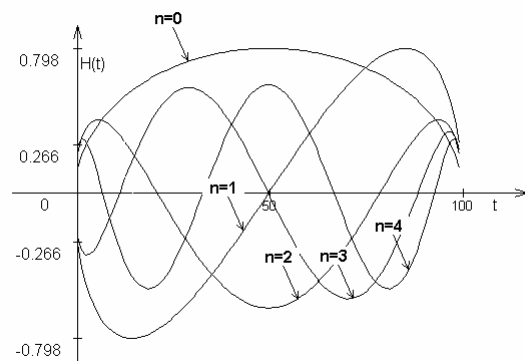


Рис. 3.5.10. Функции Хана порядков $n=0(1)4$ при $\alpha = 0.5, \beta = 0.5, T=100$.

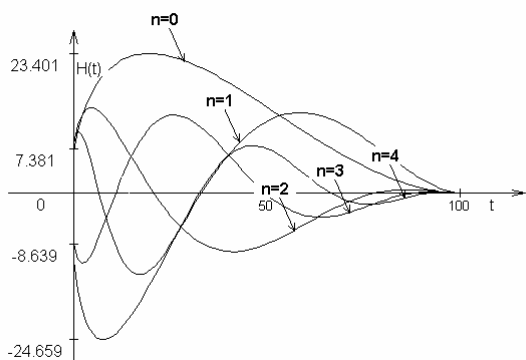


Рис. 3.5.11. Функции Хана порядков $n=0(1)4$ при $\alpha = 2, \beta = 0.5, T=100$.

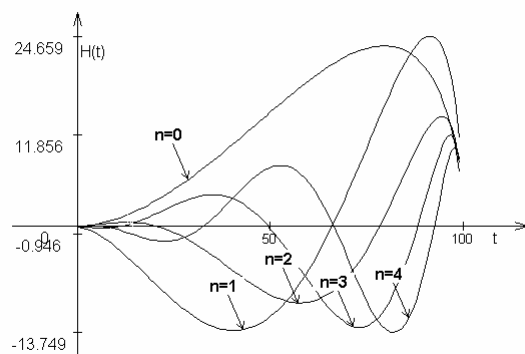


Рис. 3.5.12. Функции Хана порядков $n=0(1)4$ при $\alpha = 0.5, \beta = 2, T=100$.

Функциями Хана называются функции:

$$h_n^{(\alpha, \beta)} = H_n^{(\alpha, \beta)} \sqrt{\frac{\Gamma(T + \alpha - t)\Gamma(\beta + 1 + t)}{\Gamma(t + 1)\Gamma(T - t)}}. \quad (3.5.5)$$

Для функций Хана функция скачков $j(t) \equiv 1$.

Вычисление коэффициентов разложения функции $f(t)$ по ортонормированным полиномам $H_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ производится по формуле

$$D_n = \sum_{t=0}^{T-1} f(t)H_n^{(\alpha, \beta)}(t)j(t) = \sum_{t=0}^{T-1} f(t)H_n^{(\alpha, \beta)}(t) \frac{\Gamma(T + \alpha - t)\Gamma(\beta + 1 + t)}{\Gamma(t + 1)\Gamma(T - t)}, \quad (3.5.6)$$

где $H_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ - ортонормированные полиномы.

Восстановление функции $f(t)$ производится по формуле

$$f(t) = \sum_{n=0}^N D_n H_n^{(\alpha, \beta)}(t). \quad (3.5.7)$$

Если разложение $f(t)$ осуществлялось по функциям Хана, то коэффициенты разложения вычисляются так:

$$E_n = \sum_{t=0}^{T-1} f(t) \cdot h_n^{(\alpha, \beta)}(t) = \sum_{t=0}^{T-1} f(t) H_n^{(\alpha, \beta)}(t) \sqrt{\frac{\Gamma(T + \alpha - t) \Gamma(\beta + 1 + t)}{\Gamma(t + 1) \Gamma(T - t)}}. \quad (3.5.8)$$

В этом случае восстановление $f(t)$ выполняется по формуле

$$f(t) = \sum_{n=0}^N E_n h_n^{(\alpha, \beta)}(t). \quad (3.5.9)$$

3.6. Полиномы семейства Шарлье

[Шведский астроном (1862-1934). Основные работы посвящены вопросам небесной механики и звездной астрономии. Шарлье применил методы математической статистики к изучению пространственного распределения звезд в Галактике и др. Ортогональные полиномы Шарлье связаны с распределением Пуассона в теории вероятностей. Были изучены Майкснером в 1934 году, Дёга, 1933 и др.]

Обозначения $C_n(t, m)$, где m - постоянный параметр, иногда $a = \frac{1}{m}$, $m > 0$.

Промежуток существования $(0, \infty)$.

Дискретный аналог формулы Родрига имеет вид:

$$C_n(t, m) = m^t \cdot t! \Delta^n \left[\frac{1}{m^{t-n} (t-n)!} \right]. \quad (3.6.1)$$

Функция скачков

$$j(t) = \frac{1}{\sqrt[m]{e} \cdot m^t \cdot t!}. \quad (3.6.2)$$

Норма полиномов Шарлье

$$\|C_n(t, m)\| = \sqrt{m^n \cdot n!}. \quad (3.6.3)$$

Явное выражение полиномов Шарлье

$$C_n(t, m) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n! t!}{i! (n-i)! (t-i)!} m^i. \quad (3.6.4)$$

Рекуррентная формула имеет вид

$$C_{n+1}(t) = (mt - mn - 1)C_n(t) + mnC_{n-1}(t). \quad (3.6.5)$$

Частные значения

$$C_0(t) = 1;$$

$$C_1(t) = 1 - mt;$$

$$C_2(t) = 1 - (2 + m)mt + m^2t^2;$$

$$C_3(t) = 1 - (3 + 3m + 2m^2)mt + (3 + 3m)m^2t^2 - m^3t^3.$$

Графики полиномов и функций Шарлье приведены на рис. 3.6.1-3.6.2.

Функции Шарлье имеют вид:

$$c_n(t) = C_n(t) \cdot \sqrt{j(t)} = C_n(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{m^t e \cdot m^t \cdot t!}}. \quad (3.6.6)$$

Вычисление спектра полиномов Шарлье для функции $f(t)$:

$$E_n = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) \bar{C}_n(t) \cdot \frac{1}{m^t e \cdot m^t t!} \cdot \frac{1}{\sqrt{m^n \cdot n!}}. \quad (3.6.7)$$

Формула восстановления $f(t)$:

$$f(t) = \sum_{n=0}^N E_n \cdot \bar{C}_n(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{m^n \cdot n!}} = \sum_{n=0}^N E_n C_n(t), \quad (3.6.8)$$

где $C_n(t)$ - нормированные полиномы Шарлье.

Разложение $f(t)$ по ортонормированным функциям Шарлье выполняется по формуле

$$E_n = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) \cdot c_n(t) \cdot \sqrt{j(t)} = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) C_n(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{m^t e \cdot m^t \cdot t!}}. \quad (3.6.9)$$

Восстановление функции $f(t)$ в этом случае будет

$$f(t) = \sum_{n=0}^N E_n \cdot c_n(t), \quad (3.6.10)$$

где $c_n(t)$ - ортонормированная функция Шарлье.

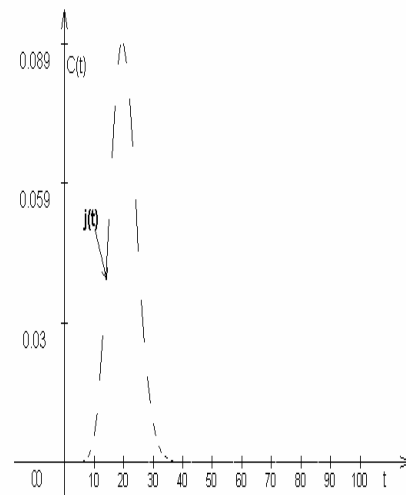
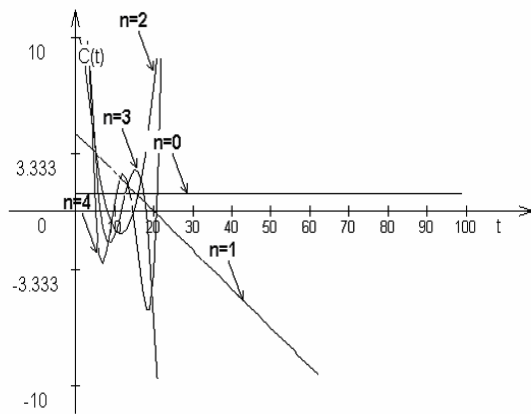


Рис. 3.6.1. (а) Полиномы Шарлье и функция скачков при $n=0(1)4$, $T=100$, $a = 20$.

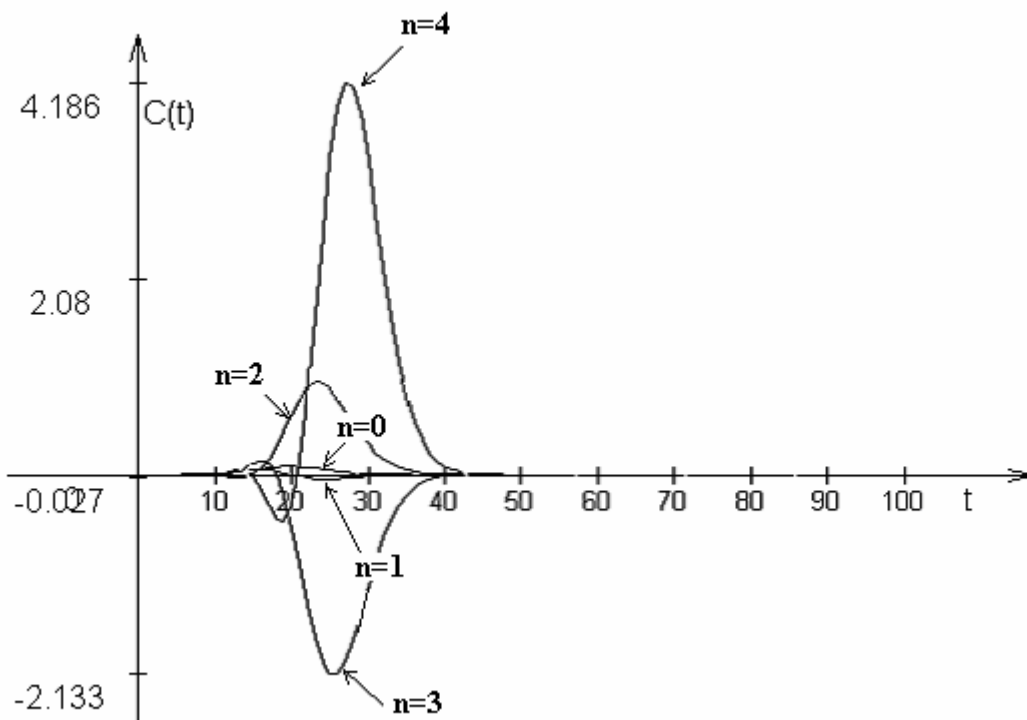


Рис. 3.6.1. (b) Функции Шарлье при $n=0(1)4$, $T=100$, $a = 20$.

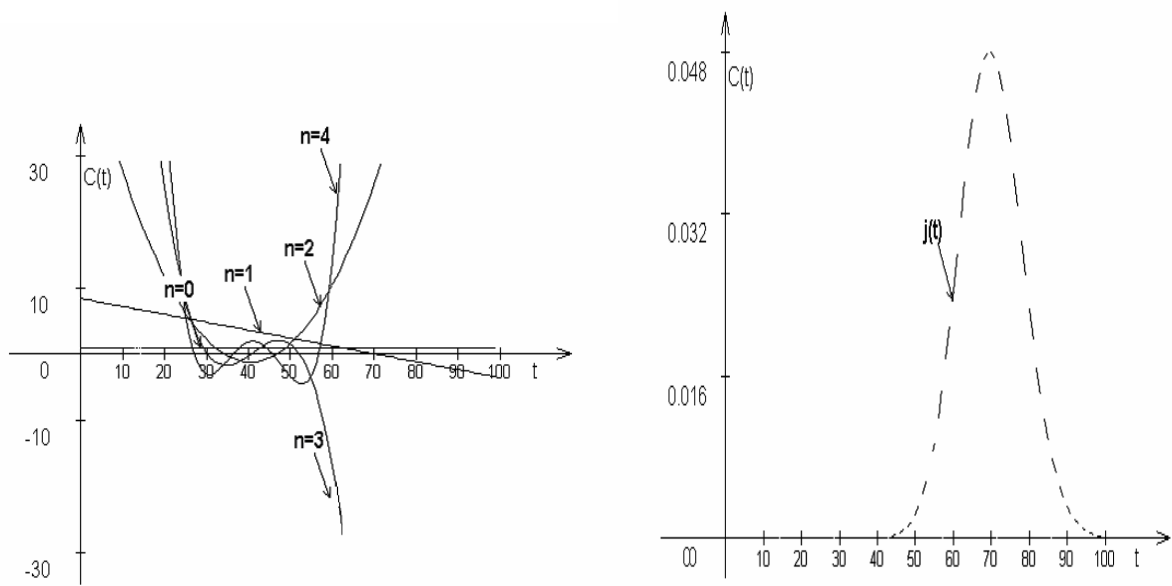


Рис. 3.6.2. (а) Полиномы Шарлье и функция скачков при $n=0(1)4$, $T=100$, $a = 70$.

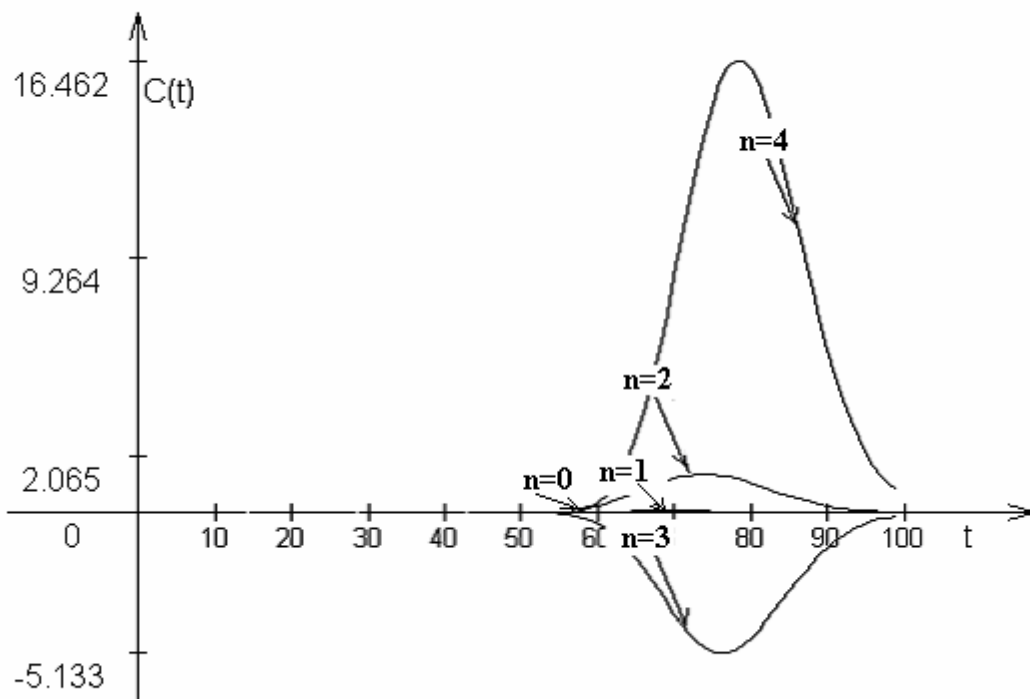


Рис. 3.6.2. (b) Функции Шарлье при $n=0(1)4$, $T=100$, $a = 70$.

3.7. Особенности аналитической аппроксимации информационных массивов ортогональными полиномами и функциями дискретной переменной

В работах [23] показано, что основные аналитические соотношения, определяющие свойства различных ортогональных базисов дискретной переменной из числа классических, являются дискретными аналогами соответствующих формул, задающих свойства классических ортогональных базисов непрерывной переменной.

Это указывает на то, что многие характеристики ортогональных систем непрерывной и дискретной переменной практически совпадают. Обращение к ортогональным базисам дискретной переменной обусловлено, прежде всего, необходимостью избавления цифровых ЭВМ от численного интегрирования сложных функциональных зависимостей и заменой его суммированием при вычислении коэффициентов разложения.

Базисы дискретной переменной наиболее естественны для применения на ЭВМ и в то же время свободны от недостатков, присущих дискретным ортогональным системам, построенным из кусочно-постоянных недифференцируемых функций (типа функций Хаара, Уолша, Адамара и др.), которые наиболее просто реализуются на ЭВМ, но не приводят к аналитическим описаниям информационных данных. Следовательно, при этом полностью исключаются аналитические приемы из процесса обработки.

Отличительной особенностью классических ортогональных базисов дискретной переменной, приведенных в таблице, является то, что кроме базиса Чебышёва (наиболее простого в вычислительном отношении) они все в задающих их формулах имеют параметры, изменение которых в определенных пределах существенно меняет свойства ортогональных базисов и их функций скачков.

Это означает, что при аналитической аппроксимации такими базисами возможно введение адаптивных процедур (по аналогии с базисами непрерывного аргумента), которые существенно повысят эффективность описания данных, то есть обеспечат заданную точность аналитического описания входных информационных массивов наиболее коротким отрезком ортогонального ряда.

Глава IV. Адаптивное аналитическое описание информационных массивов. Получение необходимых оценок и характеристик. Распознавание

4.1. Факторы, влияющие на сложность структуры аналитического описания данных

Основное положение теории аппроксимации применительно к ортогональным разложениям утверждает, что разложение исследуемой функции, принадлежащей пространству L^2 , в ортогональный ряд по любому замкнутому ортогональному базису может обеспечить любую, наперед заданную точность в среднеквадратичном (или равномерном) смысле. Кроме того, утверждается, что такая аппроксимация является оптимальной с точки зрения простоты вычислений по сравнению с другими подходами, основанными на методе наименьших квадратов [30]. Сформулированные положения не налагают каких-либо ограничений на длину отрезка ортогонального ряда (глубину разложения) и не учитывают особенности аппроксимируемых сигналов. Поэтому обычно работают с каким-либо одним фиксированным базисом, выбранным из дополнительных соображений. Если же ставится задача обеспечивать заданную точность наиболее простым аналитическим выражением, то, в соответствии с основными свойствами ортогональных разложений, необходимо учитывать особенности формы поступающих сигналов и выбирать для аппроксимации именно те ортогональные базисы, первые функции или взвешенные полиномы которых наиболее близки по своей форме к аппроксимируемым сигналам. Подтверждением сказанному служит следующий пример аналитического описания одного и того же сигнала различными ортогональными базисами с фиксированной глубиной разложения.

Пусть в результате некоторого экспериментального исследования получен цифровой массив, который для наглядности представим заранее известной функцией $x(t) = 2e^{-2t}$ на промежутке $[0, 4]$, $x(t) \in L^2[0,4]$. Получим его аналитическое описание в виде отрезка ортогонального ряда при $n=N=2$, используя для этого ортонормированные полиномы Лежандра, определенные на $[0, T]$, ортонормированные тригонометрические функции и ортонормированные функции Лагерра. Вычисление коэффициентов разложения A_n функции $x(t)$ по выбранному базису $\{\varphi_n(t)\}$ производится по формуле

$A_n = \int_a^b x(t)\varphi_n(t)dt$ с учетом $\rho(t) \equiv 1$. После вычисления A_n функция может быть представлена ортогональным рядом вида:

$$x(t) = \sum_{n=0}^N A_n \varphi_n(t).$$

Точность приближения $x(t)$ проще всего оценивать с помощью равенства Ляпунова-Стеклова $\int_0^4 x^2(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2$. Если задаться длиной ряда $n=N=2$, точность приближения

оценивается по степени отличия $\sum_{n=0}^N A_n^2$ от

$$\int_0^4 x^2(t)dt = 4 \int_0^4 e^{-4t} dt = 1 - \exp(-16) \approx 0,999999887 \approx 1.$$

Разложение $x(t)=2e^{-2t}$ по полиномам Лежандра.

$$A_n = \int_0^4 x(t)P_n(t)dt = 2 \int_0^4 e^{-2t} P_n(t)dt.$$

Вычисление первых трех коэффициентов разложения дает следующие значения $A_0 = 0,5, A_1 = -0,648, A_2 = 0,496$. В соответствии с равенством Ляпунова-Стеклова

$\int_0^4 x^2(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2$, относительная интегральная квадратичная ошибка приближения

оценивается следующей формулой:

$$\delta = \frac{\int_0^4 x^2(t)dt - \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2}{\int_0^4 x^2(t)dt} = 1 - \frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_n^2}{\int_0^4 x^2(t)dt}.$$

Легко показать, что

$$\int_0^4 x^2(t)dt = 4 \int_0^4 e^{-4t} dt = 1 - \exp(-16) = 0,9999... \approx 1,$$

тогда $\delta = 1 - \sum_{n=0}^2 A_n^2 = 1 - 0,916 = 0,084$, что соответствует среднеквадратичной ошибке

$$\gamma - \sqrt{\delta} = \sqrt{0,084} = 0,29.$$

2. Разложение $x(t)$ в тригонометрический ряд Фурье приводит к следующим значениям коэффициентов разложения:

$$A_0=0,5; A_1=0,309; B_1=0,242; A_2=0,144; B_2=0,226.$$

Оценка ошибки разложения в соответствии с равенством Парсеваля имеет вид

$$\delta = 1 - \left[\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^2 (A_n^2 + B_n^2) \right] = 1 - 0,35 = 0,65,$$

что соответствует интегральной среднеквадратичной ошибке $\gamma = \sqrt{\delta} = \sqrt{0,65} = 0,806$.

Величина ошибки свидетельствует о низкой точности приближения.

3. Разложение по функциям Лагерра с введенным масштабным коэффициентом m :

а) при $m = 1 \text{ с}^{-1}$ коэффициенты разложения имеют значения: $A_0=0,8; A_1=-0,48;$

$A_2=0,288$. Оценка погрешности разложения $\delta = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 = 0,047$ или

$\gamma = \sqrt{\delta} = \sqrt{0,047} = 0,216$. Малая величина ошибки свидетельствует об удачном выборе базиса;

б) при оптимальном масштабном коэффициенте $m=m_{\text{opt}}=4 \text{ с}^{-1}$ коэффициенты разложения имеют следующие значения: $A_0=1; A_1=A_2=0$, следовательно,

$$x(t) = \sum_{n=0}^2 A_n l_n(mt) = \sqrt{m} e^{-mt/2} = 1 \cdot 2 \cdot e^{-2t},$$

где $l_0(mt) = \sqrt{m} e^{-mt/2}$ – нулевая функция Лагерра.

Таким образом, правильно подобранный ортогональный базис к конкретному сигналу повышает точность приближения при фиксированном числе членов разложения. Если, к тому же, адаптировать выбранный базис к свойствам сигнала (в нашем случае, определение $m=m_{\text{opt}}$), то точная аппроксимация $x(t)$ будет обеспечена одним членом ортогонального ряда. На рис. 4.1.1 показан точный сигнал $x(t) = 2e^{-2t}$ и варианты его приближения принятыми ортогональными базисами: 1 – одним членом ряда из функций Лагерра при $m = m_{\text{opt}} = 4, A_0^2 = 1, (k_{\phi_1} = 7,0)$; 2 – аппроксимация функциями Лагерра при

$m = 1, 1 - \sum_{n=0}^2 A_n^2 = 0,047$ и $\gamma = 0,216$; 3 – аппроксимация полиномами Лежандра,

$1 - \sum_{n=0}^2 A_n^2 = 0,084$, что соответствует $\gamma = 0,29$; 4 – аппроксимация тригонометрическим

рядом Фурье, $1 - \sum_{n=0}^2 (A_n^2 + B_n^2) + A_0^2 / 2 = 0,649$ и $\gamma = 0,806$.

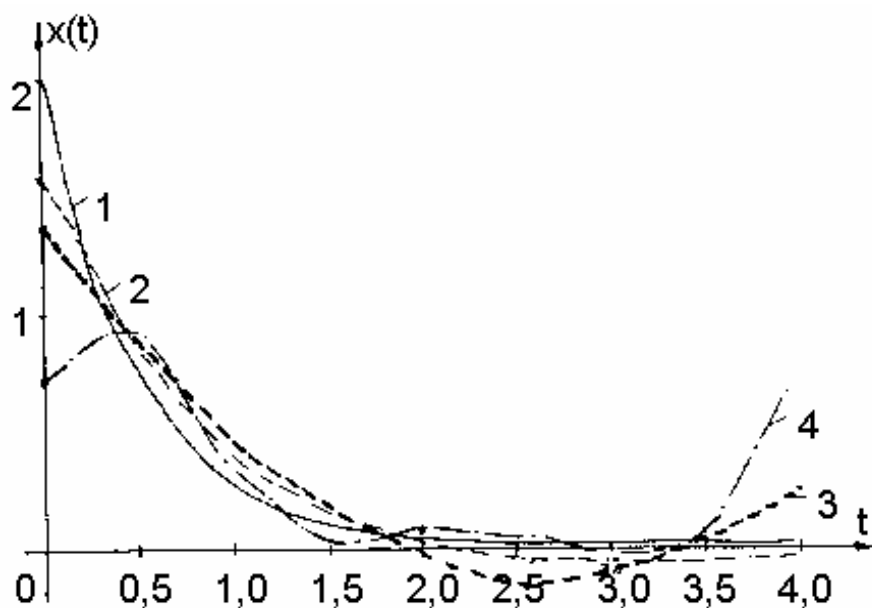


Рис. 4.1.1.

Рассмотренный пример показывает, что одной из главных задач исследования при использовании усеченных ортогональных рядов для аналитического описания является разработка методов выбора такого ортогонального базиса, первые взвешенные полиномы или функции которого по форме наиболее близко совпадали бы с формой анализируемого сигнала. Это обеспечит удовлетворение заданной точности аппроксимации в среднеквадратичном или равномерном смысле минимальным числом членов ряда, вплоть до одного члена. Выполнение указанного условия потребует, прежде всего, наличия широкого набора ортогональных базисов с различными свойствами, а также возможности оценивания в процессе аппроксимации форму конкретного сигнала и нахождения такого ортогонального базиса, первые ортогональные функции которого по форме наиболее близко совпадали бы с формой анализируемого сигнала.

Таким образом, получение оптимального (квазиоптимального) аналитического описания вполне оправдывает введение и выполнение следующих адаптивных процедур: оценка формы одной или нескольких первых ортогональных функций при подборе ортогонального базиса, которая должна быть близка или совпадать с формой аппроксимируемого сигнала, при этом, чем жестче требование получения наиболее простого аналитического описания информационных данных, тем выше требование к подбору ортогонального базиса для успешного решения поставленной задачи; промежуток ортогональности выбранного базиса совмещается с длительностью аппроксимируемого сигнала или, если ортогональный базис задан на полубесконечном

интервале, то необходимо выполнение специальных дополнительных условий по согласованию базисных функций с длительностью сигнала.

Глубина разложения сигнала при этом должна автоматически изменяться для обеспечения заданной точности аппроксимации конкретного сигнала. Чем выше уровень алгоритмической и программной реализации сформулированных условий по подбору и адаптации ортогональных базисов к конкретным сигналам, тем проще и быстрее достигается оптимальная или квазиоптимальная аналитическая аппроксимация сигнала.

Вопросы и упражнения.

1. Перечислите адаптивные процедуры, которые следует использовать при аппроксимации сигнала.
2. Что такое интегральное квадратичное приближение? Что такое среднеквадратичное приближение? Исходя из каких условий оно может быть получено?
3. Что требуется знать об аппроксимируемом сигнале при разложении его в ряд по ортогональной системе функций (полиномов)?

4.2. Коэффициент формы и его использование

Анализ условий получения оптимальной (квазиоптимальной) аналитической аппроксимации (получение заданной точности аналитического описания информационных данных отрезком ортогонального ряда минимальной длины) свидетельствует о том, что чем ближе будут совпадать по форме поступающие на ЭВМ сигналы с одним из первых взвешенных полиномов выбранного ортонормированного базиса, тем меньшим числом членов ряда будет обеспечиваться заданная точность его описания.

Следовательно, необходимо создание алгоритма, оценивающего форму сигнала и нескольких первых взвешенных полиномов ортогональных базисов, введенных в ЭВМ и имеющих различные свойства. С этой целью было введено понятие коэффициента формы исследуемой функции. При выводе формулы коэффициента формы необходимо выполнение следующих требований: оценка формы анализируемой функции должна быть интегральной и инвариантной к длительности и величине сигнала, а также отображать основные особенности ее формы; процесс оценивания формы функции должен сводиться к простым операциям и выполняться за минимально возможное время; процесс оценивания должен быть полностью автоматизирован.

Вывод формулы для коэффициента формы сигнала основывается на свойствах интеграла Фурье, с помощью которого вычисляются коэффициенты разложения функции по принятому ортогональному базису. Известно, что интеграл Фурье представляет собой скалярное произведение в функциональном пространстве для функций, также принадлежащих этому пространству и численно равен величине проекции неизвестной функции на известную. В рассматриваемом случае известные функции должны принадлежать пространству L^2 . При этом выбор конкретной известной функции определяется теми характерными особенностями, которые, прежде всего, должны быть выявлены в неизвестной функции (сигнале) в процессе оценки ее формы. Например, при разложении функции $x(t)$ в ортогональный ряд наиболее часто возникает вопрос: функция $x(t)$ на заданном промежутке $(0, T)$ убывает или возрастает, или она ведет себя как невозрастающая (неубывающая) функция. В первом случае в качестве известной функции следует принять какую-либо убывающую на промежутке функцию, например, линейную $\eta(t) = T - t$. Тогда численное значение интеграла Фурье вида

$$\int_0^T x(t)\eta(t)dt = \int_0^T x(t)(T-t)dt \quad (4.2.1)$$

будет пропорционально проекции в функциональном пространстве L^2 неизвестной функции $x(t)$ на известную $\eta(t)$. Если же необходимо повысить "чувствительность" интеграла (4.2.1) к оценке искомого признака, то следует вычислить второй интеграл, в котором в качестве известной функции принята функция $\xi(t) = t$, имеющая "противоположные" свойства по отношению к $\eta(t)$, а затем найти отношение этих двух интегралов, то есть значение коэффициента формы K_1

$$K_1 = \frac{\int_0^T x(t)(T-t)dt}{\int_0^T x(t)t dt}. \quad (4.2.2)$$

Отношение (4.2.2) определяет искомое выражение линейного коэффициента формы, подчеркивая тем самым, что известные функции $\eta(t)$ и $\xi(t)$ являются линейными по переменной t . В том случае, если $x(t)$ является убывающей функцией, то легко заметить, что значение интеграла в числителе будет больше, чем значение интеграла в знаменателе и $K_1 > 1$. Наоборот, если при тех же $\eta(t)$ и $\xi(t)$ функция будет расти на промежутке, то $K_1 < 1$. Наконец, если функция $x(t)$ ведет себя "нейтрально", то $K_1 \approx 1$. Предложенный

коэффициент формы, очевидно, является инвариантным к длительности и величине сигнала, что делает его удобным в применении.

Заметим, что выражение (4.2) можно упростить

$$K_1 = \frac{\int_0^T (x(t)(T-t)dt)}{\int_0^T x(t)tdt} = \frac{T \int_0^T x(t)dt - \int_0^T x(t)tdt}{\int_0^T x(t)tdt} = T \frac{\int_0^T x(t)dt}{\int_0^T x(t)tdt} - 1 = T \frac{J_0}{J_1} - 1, \quad (4.2.3)$$

где $J_0 = \int_0^T x(t)dt$, $J_1 = \int_0^T x(t)tdt$. Из (4.2.3) видно, что вычисление K_1 требует нахождения двух интегралов J_0 и J_1 от $x(t)$ и их отношения. Помимо оценки общей тенденции изменения $x(t)$ на промежутке, конкретные значения K_1 характеризуют при определенных условиях вполне конкретную форму сигнала.

Применение коэффициентов формы в задачах оценки формы функций указывает на то, что в ряде случаев для повышения их чувствительности следует применять в качестве известных степенные функции ($n > 1$), например, соответственно, $\eta^2(t) = (T-t)^2$ и $\xi^2(t) = t^2$ и более высокой степени. Такие коэффициенты формы степени n принято называть степенными и обозначать K_n . В некоторых случаях целесообразно применять экспоненциальные коэффициенты формы $K_{\text{экс}}$. В этом случае используются функции $\eta(t) = e^{-at}$, $\xi(t) = e^{-a(T-t)}$ и др.

Рассмотренные степенные и экспоненциальные коэффициенты формы четко отслеживают общую тенденцию поведения функции на промежутке существования (например, больше или меньше единицы значение K_1), а конкретное значение коэффициента соответствует определенной форме сигнала. Однако эти коэффициенты формы не дают однозначного ответа об особенности поведения функции в средней области аппроксимируемого участка. Для определения характера поведения функции в средней области участка (например, функция выпуклая или вогнутая) предлагается использовать параболический коэффициент формы. Этому коэффициенту формы соответствуют $\eta(t) = 4t^2 - 4Tt + T^2$ и $\xi(t) = 4t(T-t)$. При решении задач распознавания можно использовать для интегральной оценки кривой совместно степенной и параболический коэффициенты формы.

Если аналитическая аппроксимация информационных массивов требует использования ортогональных базисов дискретного аргумента, то удобно использовать те же коэффициенты формы, что и для функций непрерывного аргумента. Разница лишь в том, что операции интегрирования следует заменить операциями суммирования.

Опыт практического использования рассмотренных коэффициентов формы в некоторых задачах позволяет уже сейчас сделать следующие выводы: простейший степенной коэффициент формы K_1 позволяет в подавляющем большинстве случаев уверенно оценивать общую тенденцию поведения функции на промежутке; в зависимости от поставленной задачи требуется вводить различные коэффициенты формы для оценки особенностей формы сигнала. Конкретные значения коэффициентов формы служат интегральным инструментом классификации и распознавания одномерных и многомерных сигналов. Введение коэффициента формы позволяет автоматизировать процедуру подбора наиболее подходящего ортогонального базиса для эффективного аналитического описания одномерных, плоских и пространственных кривых.

Использование понятия коэффициента формы функции (сигнала) полезно как при организации адаптивных процедур в процессе аналитического описания информационных массивов, так и при решении некоторых задач анализа контурных изображений и распознавания образов. Коэффициенты формы можно применять во многих задачах автоматического управления динамическими объектами, в диагностических задачах и многих других прикладных исследованиях. В то же время возможность интегральной оценки функций, основанной на свойствах интеграла Фурье, далеко не исчерпывается указанными областями применения. Это направление исследований весьма перспективно и его теоретическое обоснование и практическое использование получит в будущем дальнейшее развитие.

Вопросы и упражнения.

1. Поясните основные свойства и смысл коэффициента формы сигнала
2. Последовательность применения коэффициента формы сигнала. Сформулировать основные выводы по результатам практического использования коэффициента формы.
3. Существо рекомендуемых адаптивных процедур и последовательность их применения при адаптивном аналитическом описании сигналов.

4.3. Разработка и применение адаптивных процедур при аналитическом описании данных, обеспечивающих заданную точность описания выражением наименьшей сложности

Были разработаны следующие адаптивные процедуры:

- выбор подходящего ортогонального базиса;

- согласование промежутков существования сигнала и базисных функций;
- вариация глубины разложения для достижения требуемой точности описания сигналов.

Рассмотрим реализацию адаптивных процедур по отдельности.

Выбор подходящего ортогонального базиса. Стремление получить, возможно, более простое аналитическое описание информационных массивов, отображающих сигналы определенного класса или даже каждого сигнала, предполагает, прежде всего, полное исключение случаев, когда затухающий на конечном промежутке сигнал будет аппроксимирован возрастающими на промежутке ортогональными функциями (полиномами) и наоборот. Следует также избегать случаев аппроксимации затухающих или возрастающих сигналов периодическими ортогональными функциями. Исключение рассмотренных неблагоприятных случаев аппроксимации сигналов является наиболее радикальным шагом на пути получения оптимального (квазиоптимального) аналитического описания.

Предлагаемый нами способ позволяет в автоматическом режиме исключать нежелательные варианты аналитической аппроксимации сигналов. Для этого необходимо предварительно оценить форму нулевых ортогональных функций или взвешенных полиномов - представителей выбранной совокупности ортогональных базисов из числа классических, которые имеют различные свойства и были введены в ЭВМ. Для оценки формы указанных функций целесообразно использовать степенной коэффициент формы K_1 , который является самым простым инструментом при решении поставленной задачи. Этим же коэффициентом формы K_1 оценивается форма каждого сигнала, поступающего в ЭВМ. Вычисленный коэффициент формы очередного поступившего в ЭВМ сигнала сравнивается с ранее вычисленными и хранящимися в памяти значениями коэффициентов формы взвешенных нулевых функций ортогональных базисов. В результате сравнения значений коэффициента формы сигнала с коэффициентами формы взвешенных нулевых функций ортогональных базисов, введенных в ЭВМ, устанавливается: ортогональные функции какого из базисов наиболее близки по форме данному конкретному сигналу, и выдается команда на аппроксимацию сигнала по функциям (или взвешенным полиномам) выбранного так базиса.

Практика показывает, что если использовать лишь три ортогональных базиса: один – с ортогональными функциями, затухающими к концу промежутка, второй – с ортогональными функциями, растущими на промежутке, и третий базис с функциями нейтральными (периодическими) на заданном промежутке, то даже этого вполне достаточно, чтобы существенно повысить эффект аппроксимации.

Согласование промежутков существования сигнала и базисных функций. Формулы, по которым вычисляются коэффициенты формы, представляют собой отношение интегральных выражений, являющихся скалярными произведениями двух функций в функциональном пространстве L^2 . Эти отношения, очевидно, являются инвариантными к промежутку, на котором определены исследуемые функции. Модифицированные классические ортогональные и нормированные базисы определены либо на конечном промежутке $[0, T]$, либо на полубесконечном промежутке $[0, \infty]$. Поэтому существуют два варианта согласования длительности аппроксимируемого сигнала с областью существования выбранного ортонормированного базиса. Предлагаемая адаптивная процедура является весьма важной для получения компактного аналитического описания и имеет два самостоятельных подхода для базисов, определенных на конечном интервале $[0, T]$ и полубесконечном интервале $[0, \infty]$. Ортогональные базисы, определенные на конечном промежутке $[0, T]$, согласовать по длительности с сигналом не представляет труда. Следует верхний предел промежутка ортогональности выбранного базиса T_δ приравнять к длительности сигнала T_c , то есть $T_\delta = T_c$. При этом ортогональность и нормировка базисных функций сохраняются. Если же ортогональный базис из числа модифицированных классических определен на промежутке $[0, \infty]$, то согласование его функций (взвешенных полиномов) с длительностью поступающего сигнала необходимо выполнить по следующей методике. Все модифицированные ортогональные базисы, заданные на $[0, \infty]$, имеют масштабный коэффициент m , размерность которого обратна размерности аргумента, то есть, если t имеет размерность [сек], то m имеет размерность [1/сек]. Изменение m приводит к "сжатию" или "растягиванию" ортогональных функций вдоль оси абсцисс. Правильно выбранный масштабный коэффициент обеспечивает необходимую точность аппроксимации наиболее коротким ортогональным рядом, то есть при $m = m_{opt}$ выполняются условия $N = N_{min}$. В ряде работ [11,12,21] предлагается методика определения m при разложении в ортогональный ряд на основе полиномов Лагерра функции, для которой известно изображение Лапласа, – это так называемый графоаналитический метод, основанный на распределении на комплексной плоскости полюсов изображения Лапласа аппроксимируемой функции.

Нами предлагается автоматизированный способ определения m_{opt} , основанный на аналитических соотношениях. В общем случае вычисление коэффициентов разложения сигнала $x(t)$ по функциям модифицированных ортогональных базисов из числа классических, определенных на промежутке $[0, \infty]$, производится на основе интеграла

Фурье $A_n(m) = \int_0^{\infty} x(t)\varphi_n(mt)\rho(mt)dt$, из которого видно, что в этом случае значения

коэффициентов разложения являются функциями масштабного коэффициента m .

При оптимальном разложении один или несколько первых коэффициентов разложения имеют максимальные значения, а коэффициенты со старшими номерами резко уменьшаются по абсолютным значениям (так как именно такие условия свидетельствуют об оптимальном разложении). Поэтому следует искать такое m , которое соответствовало бы максимальному значению первых коэффициентов разложения. С увеличением номера, число экстремумов у коэффициентов разложения $A_n(m)$ будет возрастать, однако главный экстремум любого коэффициента будет расположен вблизи экстремума первого коэффициента $A_0(m)$. Поэтому при расчетах целесообразно в большинстве случаев определять оптимальное значение $m = m_{opt}$ по первому коэффициенту разложения $A_0(m)$. Действительно, пусть преобразование Лапласа математической модели (линейной или линеаризованной, что во многих случаях допустимо) информационных сигналов известного класса имеет вид дробно-рациональной функции комплексного переменного p

$$W(p) = B(p)/D(p), \quad (4.3.1)$$

где $B(p)$ - полиномы степени l , $D(p)$ - полиномы степени v , причем $l \leq v$. Можно показать, что выражение для первого коэффициента разложения в соответствии с (4.3.1) по базисам, определенным на $[0, \infty]$ из числа модифицированных классических, будет иметь вид

$$A_0(m) = \sqrt{m} B(um)/D(um), \quad (4.3.2)$$

где u - постоянная, определяемая выбранным ортогональным базисом, заданным на $[0, \infty)$. Например, для функций Лагерра $u = 0,5$, для взвешенных полиномов Лагерра и для экспоненциальных ортогональных функций $u = 1$. Продифференцируем выражение (4.3.2) по m и приравняем его нулю

$$\frac{dA_0(m)}{dm} = \frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{m}} B(um) + u\sqrt{m}B'(um) \right] D(um) - \sqrt{m}B(um)uD'(um)}{D^2(um)} = 0. \quad (4.3.3)$$

Знаменатель последнего выражения всегда положителен, поэтому дробь может быть равна нулю, если нулю равен числитель, то есть,

$$[B(um) + 2umB'(um)]D(um) - 2B(um)uD'(um) = 0. \quad (4.3.4)$$

Действительное положительное значение m , найденное из уравнения (4.3.4), и будет являться оптимальным значением m_{opt} , которое следует использовать в расчетах коэффициентов разложения. Вычисление всех корней уравнения (4.3.4) является нежелательным, так как при высоком порядке уравнения это трудоемкая и длительная операция. В связи с этим, прежде всего, следует установить, сколько в уравнении (4.3.4) будет действительных положительных корней, то есть, сколько экстремумов будет иметь выражение (4.3.2). Ответ на этот вопрос можно получить из условий существования действительных корней многочлена $f(m)$. К ним относятся теоремы Штурма и Бюдана-Фурье из высшей алгебры [33]. Опираясь на теорему Декарта, легко установить число положительных действительных корней по коэффициентам многочлена. При этом число положительных корней многочлена $f(m)$, засчитываемых каждый столько раз, какова его кратность, равно числу перемен знаков в системе коэффициентов этого многочлена (причем равные нулю коэффициенты не учитываются) или меньше этого значения на четное число. Приведенная теорема указывает на то, что, например, многочлен $f(m) = m^5 + 2m^4 - 5m^3 + 8m^2 - 7m - 3$ может иметь три или один положительный действительный корень, так как у него три перемены знаков.

После того, как будет установлено, что между рациональными числами a и b содержится лишь один корень многочлена $f(m)$, остается так сузить этот промежуток, чтобы значение корня было вычислено с заданной точностью. Приближенное вычисление действительного корня можно осуществлять методом линейной интерполяции или методом Ньютона.

Рассмотрим несколько примеров определения m_{opt} .

Пример 1. Пусть необходимо описать аналитически импульсную переходную функцию объекта, который имеет передаточную функцию вида $W(p) = \frac{\beta_1}{p + \nu}$. В этом

случае выражение первого коэффициента имеет общий вид $A_0(m) = \sqrt{m} \frac{\beta_1}{um + \nu}$, а его

производная $\frac{dA_0(m)}{dm} = \frac{1}{2\sqrt{m}} \frac{\beta_1(um + \nu) - \sqrt{m}\beta_1 u}{(um + \nu)^2}$. Приравнявая нулю числитель,

получим $\beta_1(\nu - um) = 0$ или $\nu = um$. Из последнего уравнения находим $m_{opt} = \nu / u$. Для

функции Лагерра и Лежандра $u = 0.5$ и $m_{\text{opt}} = 2v$. Для ортогональных экспоненциальных функций $u = 1$ и $m_{\text{opt}} = v$.

Пример 2. Получим аналитическое описание функции в виде отрезка ортогонального ряда по функциям Лагерра, изображение Лапласа которой имеет вид:

$$W(p) = \frac{K}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}. \text{ В этом случае:}$$

$$A_0(m) = \frac{\sqrt{m}K}{a_2 (um)^2 + a_1 um + a_0} \text{ и}$$

$$\frac{dA_0(m)}{dm} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{m}}K(a_2(um)^2 + a_1 um + a_0) - K\sqrt{m}(2a_2 um + a_1 u)}{[a_2(um)^2 + a_1 um + a_0]^2} = 0.$$

Приравнивая нулю числитель $K(a_2(um)^2 + a_1 um + a_0 - 4a_2(um)^2 - 2a_1 um) = 0$, получаем

$$m_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 12a_2 a_0}}{6a_2 u}. \text{ Найденное из этого выражения положительное и}$$

действительное значение m будет оптимальным. Пусть $a_2 = 10$, $a_1 = 7$, $a_0 = 1$ и $u = 0.5$, тогда $m_1 = 0.2$, $m_2 = -2/3$ и, следовательно, $m_{\text{opt}} = 0.2$. При $u = 1$, $m_{\text{opt}} = 0.1$, при $a_2 = 25$, $a_1 =$

$$3 \text{ и } a_0 = 1 \text{ имеем } m_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{309}}{150u} \text{ и при } u = 0.5, m_{\text{opt}} \cong 0.194, \text{ а при } u = 1, m_{\text{opt}} = 0.097.$$

Пример 3. Пусть исследуемый сигнал имеет передаточную функцию вида

$$\Phi(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Нулевой или первый (для ортогональных экспонент) коэффициент разложения имеет вид

$$A_0(m) = \frac{\sqrt{m}(b_1 um + b_0)}{a_3 (um)^3 + a_2 (um)^2 + a_1 um + a_0}, \text{ а его производная}$$

$$\frac{dA_0(m)}{dm} = \frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{m}}(b_1 um + b_0) + \sqrt{m}b_1 u \right] [a_3 (um)^3 + a_2 (um)^2 + a_1 um + a_0]}{[a_3 (um)^3 + a_2 (um)^2 + a_1 um + a_0]^2} -$$

$$- \frac{\sqrt{m}(b_1 um + b_0)(3a_3 u^3 m^2 + 2a_2 u^2 m + a_1 u)}{[a_3 (um)^3 + a_2 (um)^2 + a_1 um + a_0]^2}.$$

Приравнивая нулю числитель, после простых преобразований получим

$$3a_3 b_1 u^4 m^4 + (a_1 b_1 + 5a_3 b_0) u^3 m^3 + (3a_2 b_0 - a_1 b_1) u^2 m^2 + (a_1 b_0 - 3a_0 b_1) um - a_0 b_0 = 0.$$

Для определения m_{opt} необходимо отыскать корни данного уравнения. При этом следует иметь в виду, что нас интересует только положительный и действительный корень. А так как обычно $A_0(m)$ имеет при положительном m один экстремум, то следует ожидать, что такой корень будет единственным.

В общем случае для определения числа действительных положительных корней в уравнении целесообразно воспользоваться теоремой Декарта. В рассматриваемом примере это проделать нетрудно. Пусть коэффициенты исходной передаточной функции имеют следующие значения: $a_3 = 0,0000244$; $a_1 = 0,156$; $b_0 = 3,33$; $a_2 = 0,00459$; $a_0 = 4,33$; $b_1 = 0,83$. Тогда при $u = 0,5$ уравнение для определения m получит вид $0,00000379m^4 + 0,000527m^3 - 0,0286m^2 - 5,131m - 14,4 = 0$

Коэффициенты имеют одну переменную знаков, следовательно, в уравнении необходимо выделить один действительный положительный корень. В данном случае его приближенное значение $m_{opt} = 94,85$ 1/сек.

Предлагаемый выше приближенный метод определения m весьма эффективен, так как при увеличении числа членов ряда разложения промежутков, соответствующий оптимальным значениям m , расширяется и при $n = 3 - 5$ найденное значение $m_{opt} \approx 95$ 1/сек. попадает внутрь участка оптимальных значений m .

Определение m_{opt} по минимуму относительной интегральной квадратичной ошибки. В тех случаях, когда исследуемая функция задана таблично или необходимо знать наилучшую точность приближения исследуемых процессов заданным числом членов ряда, следует определять m_{opt} по критерию минимума относительной интегральной квадратичной ошибки, как функции масштабного коэффициента m и числа членов аппроксимирующего ряда. В общем виде относительная интегральная квадратичная ошибка как функция переменной m может быть представлена выражением:

а) для полиномов

$$\theta_n(m) = \frac{\int_0^T \left[x(t) - \sum_{n=0}^N A_n(m) \varphi_n(mt) \right]^2 \rho(mt) dt}{\int_0^T x^2(t) \rho(mt) dt}; \quad (4.3.5)$$

б) для функций, ортогональных с весом $\rho(mt) = 1$

$$\theta_n(m) = 1 - \left(\sum_{n=0}^N A_n^2(m) \right) \left(\int_0^\infty x^2(t) dt \right)^{-1}. \quad (4.3.6)$$

В силу основных свойств ортогонального разложения функций в ряд выражения (4.8) и (4.9) будут иметь минимум при вполне определенных m и принятом числе членов

ряда. Значение масштабного коэффициента в точке минимума $\theta_n(m)$ будет являться оптимальным с точки зрения наилучшего приближения искомой функции ортогональным рядом в интегральном квадратичном смысле.

По результатам вычислений с использованием выражений (4.3.5) и (4.3.6) строятся графики $\theta_n(m)$, которые в общем случае имеют вид, показанный на рис. 4.3.2. Имея такие графики, можно легко определить оптимальный масштабный коэффициент при заданном числе членов ряда. С другой стороны, из графиков довольно просто определить, какую наивысшую точность приближения в интегральном квадратичном смысле можно получить при заданном числе членов ряда. Если же ошибка аппроксимации задана, то приведенные графики позволяют определить число членов ряда разложения для обеспечения заданной точности при заданном масштабном коэффициенте. Таким образом, предлагаемые графики позволяют решить две важные задачи при аналитическом описании сигнала, заданного числовым массивом: определить оптимальный масштабный коэффициент и найти число членов ряда разложения при оптимальном или заданном m , исходя из требуемой точности аппроксимации. После выбора m и числа членов ортогонального ряда N получение искомого аналитического описания осуществляется по известной формуле восстановления искомого сигнала.

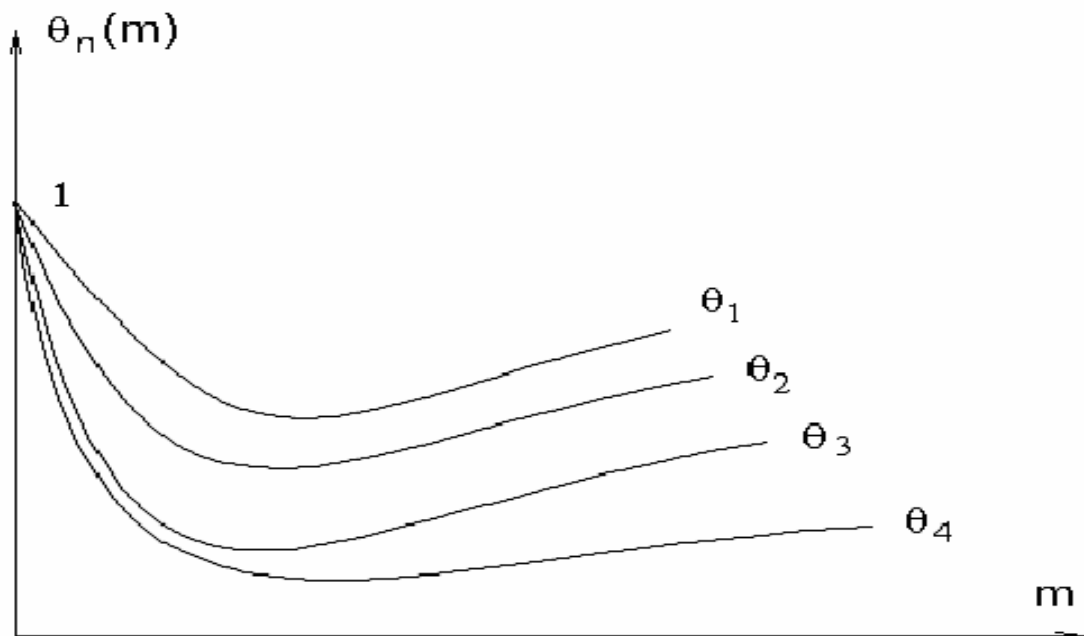


Рис. 4.3.2.

Вариация глубины разложения для достижения требуемой точности описания сигналов. Прежде всего, здесь важно отметить, что все используемые нами классические ортогональные полиномы и функции непрерывного и дискретного аргументов в соответствии с равенством Парсеваля (для тригонометрических рядов Фурье), а также

равенством Ляпунова-Стеклова (для алгебраических ортонормированных базисов) относятся к полным или замкнутым системам функций.

Следовательно, разложение в ортогональные ряды по рассматриваемым функциям является жестким. Это означает линейную независимость между членами ряда разложения, а также постоянство вычисленных ранее коэффициентов разложения. В этом случае, если при вычисленных N коэффициентах разложения требуемая точность аналитической аппроксимации не достигнута, то следует вычислять $N+1$, $N+2$, ... и т.д. новых коэффициентов пока требуемая среднеквадратичная или равномерная точность не будет соответствовать заданной. При этом вычисленные ранее коэффициенты разложения остаются неизменными.

Поэтому в алгоритмах и программах вычисления коэффициентов разложения предусмотрена процедура проверки точности аналитического описания. При достижении заданной точности вычисление новых коэффициентов на ЭВМ прекращаются, и результаты вычислений выводятся на печать.

Вопросы и упражнения

1. Перечислите основные адаптивные процедуры, которые используются в процессе аналитического описания сигналов.
2. Как реализуется адаптивная процедура по выбору конкретного ортогонального базиса при аналитической аппроксимации конкретного сигнала?
3. Как реализуется адаптивная процедура согласования промежутка существования сигнала и промежутка ортогональности выбранного базиса:
 - а) в случае, если ортогональный базис существует на ограниченном интервале;
 - б) в случае, если ортогональный базис задан на неограниченном интервале.
4. Объясните и обоснуйте процесс вариации глубины разложения.

4.4. Исследование операции умножения рядов в пространстве коэффициентов разложения.

Рассмотрим следующую задачу: требуется перемножить два отрезка ортогонального ряда. Изначально возникают два способа решения этой проблемы: во-первых, перемножить аналитически эти два ряда и привести результат, если нужно, к виду ортогонального ряда; во-вторых, перемножить исходные ряды поточечно, рассматривая

их как функции, заданные на некоторой системе отсчетов. Ниже приведена попытка исследования этих двух способов умножения функций [31].

Составим формальное почленное произведение двух разложений вида (2.7.2):

$$c(x) = a(x)b(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_i b_j \phi_i(x) \phi_j(x). \quad (4.4.1)$$

Произведение базисных функций раскладывается, вообще говоря, в бесконечный ряд по этой же системе функций:

$$T_i(x)T_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{ijk} \phi_k(x).$$

Коэффициенты результирующего ряда будут билинейными формами коэффициентов исходных рядов:

$$c_k = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \delta_{ijk} a_i b_j. \quad (4.4.2)$$

Коэффициенты этих билинейных форм являются интегралами от тройных произведений базисных функций:

$$\delta_{ijk} = \int_{-1}^1 \phi_i(x) \phi_j(x) \phi_k(x) \rho(x) dx. \quad (4.4.3)$$

Величина δ_{ijk} является основной при определении правила преобразования коэффициентов при умножении ортогональных рядов и определяется выбранным базисом. Заметим, что тензор δ_{ijk} является симметричным. В случае классических ортогональных многочленов $\delta_{ijk} = 0$, если сумма значений двух индексов меньше третьего индекса $i + j < k$.

Зафиксируем функцию $b(x)$ вида (2.7.2) и обозначим заглавной буквой B оператор умножения на эту функцию в пространстве коэффициентов разложения. Тогда выражение (4.4.2) примет вид:

$$c_k = \sum_{i=0}^{N-1} B_{ki} a_i, \quad (4.4.4)$$

или в матричной форме $c = Ba$, где коэффициенты матрицы оператора B имеют вид:

$$B_{ki} = \sum_{j=0}^{N-1} \delta_{ijk} b_j. \quad (4.4.5)$$

Из (4.4.2) составим уравнения для коэффициентов разложения квадрата ряда:

$$c_k = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \delta_{ijk} a_i a_j. \quad (4.4.6)$$

Рассмотрим две обратные задачи: по известному вектору коэффициентов c найти коэффициенты a , что будет соответствовать делению функций $a(x) = \frac{c(x)}{b(x)}$ в случае линейной системы (4.4.4) и нахождению квадратного корня $a(x) = \sqrt{c(x)}$ в случае системы квадратичных уравнений (4.4.6). Заметим, что эти системы являются в общем случае бесконечными. Вопрос о разрешимости конечной подсистемы системы (4.4.4) при $k = 0, \dots, N-1$ требует изучения свойств матрицы оператора умножения на функцию (4.4.5), действующего в конечномерном пространстве коэффициентов разложения E_N .

$$B: E_N \rightarrow E_N. \quad (4.4.7)$$

Таким образом, имеем следующее

Определение 1. (оператора умножения проекционного типа)

$$P_N B P_N, \quad (4.4.8)$$

где P_N - оператор проектирования, B - оператор умножения, действующий в бесконечномерном пространстве.

У т в е р ж д е н и е 1. Матрица оператора умножения на функцию является симметричной.

Доказательство непосредственно следует из определения (4.4.5) и симметричности тензора δ_{ijk} . Заметим, что существенным требованием является нормировка базиса, в котором этот оператор рассматривается. Для ортогонального, но ненормированного базиса это утверждение не справедливо. Утверждение доказано.

У т в е р ж д е н и е 2. Матрица оператора умножения на функцию положительно определена ($B > 0$), если порождающая ее функция положительна $b(x) > 0$.

Доказательство следует из рассмотрения следующего скалярного произведения:

$$(a(x)b(x), a(x)) = (Ba, a) = \int_{-1}^1 b(x)a^2(x)\rho(x)dx. \quad (4.4.9)$$

Скалярное произведение записано сначала в пространстве коэффициентов разложения, а затем в функциональном пространстве. Если функция $b(x)$ имеет постоянный знак на всем отрезке интегрирования, то знак интеграла, а вместе с ним и бесконечной квадратичной формы (Ba, a) , строго определен при любом выборе a . Если первые N компонент вектора a ненулевые, а остальные равны нулю, то выражение (Ba, a) становится конечной квадратичной формой с конечной матрицей B , равной главному минору N -го порядка бесконечной матрицы. Утверждение доказано.

Пусть $\lambda_i(B) : \det(B - \lambda I) = 0$ - собственные значения оператора умножения на функцию B .

Тогда справедлива следующая

Т е о р е м а 1. Собственные значения матрицы оператора умножения на функцию ограничены максимальным и минимальным значениями функции, порождающей этот оператор

$$\min_{x \in D} (b(x)) \leq \lambda_i(B) \leq \max_{x \in D} (b(x)). \quad (4.4.10)$$

Доказательство. Оператор умножения на функцию, принимающую постоянное значение d , имеет диагональный вид $D = dI$, где I единичный оператор. Предположим, исследуемая функция $b(x)$ имеет максимальное b_{max} и минимальное b_{min} значения и порождает оператор умножения B согласно (4.4.5). Тогда функции $b(x) - b_{min} \geq 0$ соответствует оператор $(B - b_{min}I) \geq 0$. Отсюда следует, что все собственные значения матрицы B не меньше b_{min} . Аналогично доказывается, что все собственные значения матрицы B не больше b_{max} . Теорема доказана.

Пространство функций, интегрируемых с квадратом, а также его конечномерные подпространства, вообще говоря, не являются замкнутыми по отношению к умножению составляющих их элементов. Результат умножения элементов некоторого подпространства в общем случае принадлежит всему бесконечномерному пространству, а может вообще не являться элементом гильбертова пространства. Из этого следует, что операция умножения, введенная в конечномерном пространстве таким образом, что результат умножения отрезков рядов проектируется на исходное подпространство, коммутативна, но неассоциативна. Как следствие этого, операторы умножения на функцию, спроектированные на конечномерное подпространство, не являются коммутирующими. Действительно, результат умножения $a(x)$ и $b(x)$, представленных отрезками рядов вида (2.7.2), с одновременным проектированием или обрезанием ряда для $c(x)$ в матричной форме имеет вид

$$c = Ab = Ba,$$

где A и B квадратные матрицы, представляющие собой главные миноры соответствующих бесконечных матриц. При вычислении произведения трех рядов $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$, однако, результат будет зависеть от того порядка, в котором производить вычисления. Например, следующим выражениям

$$a(x)(b(x)c(x)) \text{ и } b(x)(a(x)c(x))$$

соответствуют в пространстве коэффициентов разложения неэквивалентные матричные операции:

$$ABc \neq BA c ,$$

что доказывает некоммутативность в общем случае операторов умножения на функцию.

Рассмотрим конечномерное подпространство E_K пространства L^2 , образованное линейными комбинациями (2.7.2). Такое пространство изоморфно пространству функций дискретного аргумента V_K той же размерности. В пространстве функций дискретного аргумента оператор умножения имеет простейший (диагональный) вид. Перенесем оператор умножения на функцию из пространства функций дискретного аргумента в пространство коэффициентов разложения. Для этого необходимо определить операторы перехода между пространством коэффициентов разложения и пространством сеточных функций. Построим эти операторы для классических ортогональных многочленов с помощью квадратурных формул Гаусса.

Обозначим M - оператор умножения на функцию в пространстве функций дискретного аргумента. Пусть оператор T имеет матрицу размером $N \times K$ с элементами $\Phi_{ij} = \phi_i(x_j)$, где x_j - узлы квадратурной формулы Гаусса, Φ^* - сопряженный оператор, W - диагональная матрица с весами квадратурной формулы Гаусса w_j на главной диагонали.

Тогда искомый оператор можно записать в виде композиции:

Определение 2.(оператора умножения интерполяционного типа)

$$\Phi \times W \times M \times \Phi^* . \quad (4.4.11)$$

Эта композиция включает в себя следующие преобразования:

1. Оператор синтеза Φ^* обеспечивает вычисление значений ряда в точках сетки, т.е. преобразование вектора коэффициентов разложения в вектор значений функции дискретного аргумента;
2. Оператор масштабирования M задает умножение функции в узлах сетки на функцию дискретного аргумента, представленную этим оператором;
3. Оператор анализа, представленный композицией ΦW , обеспечивает вычисление коэффициентов разложения, т.е. обратное преобразование из пространства функций дискретного аргумента в пространство коэффициентов разложения.

Таблица 4.4.1. Операторы, осуществляющие преобразования между пространствами

| обозначение | название |
|--------------------------------|--|
| $B : L^2 \rightarrow L^2$ | оператор умножения |
| $P_N : L^2 \rightarrow E_N$ | проектор |
| $\Phi^* : E_N \rightarrow V_K$ | оператор синтеза (восстановления функции) |
| $M : V_K \rightarrow V_K$ | оператор масштабирования (умножения) |
| $\Phi W : V_K \rightarrow E_N$ | оператор анализа (вычисления коэффициентов разложения) |

Рассмотрим алгебраические свойства введенного оператора. Заметим, что оператор умножения на единицу представляется единичной матрицей, т.е. $\Phi W \Phi^* = I$, что является выражением условия ортонормированности базиса в дискретной форме (2.7.5). При $K = N$ имеет место равенство $\Phi^* \Phi W = I$ и, как следствие, коммутативность операторов вида (4.4.11):

$$\Phi W M_1 \Phi^* \Phi W M_2 \Phi^* = \Phi W M_1 (\Phi^* \Phi W) M_2 \Phi^* = \Phi W M_1 M_2 \Phi^*. \quad (4.4.12)$$

Очевидно, справедлива следующая

Т е о р е м а 2. Собственные значения матрицы оператора умножения на функцию (1) при $K = N$ совпадают со значениями функции, порождающей этот оператор, в узлах сетки квадратурной формулы Гаусса

$$\lambda_i(B) = b(x_i) \quad i = 1, \dots, N.$$

При $K = N$ определено взаимно-однозначное соответствие коммутативного кольца операторов (4.4.11), действующих в пространстве коэффициентов разложения, и кольца сеточных функций. Оператор (4.4.11) дает альтернативное определение операции умножения в подпространстве гильбертова пространства фиксированной размерности N . Это определение имеет параметр $K \geq N$. При $K \rightarrow \infty$ данное определение переходит в определение 1 (4.4.8), а при $K = N$ имеет место коммутативность операторов.

Построение оператора (4.4.11) не требует знания аналитических свойств базиса, а только узлов и весов квадратурной формулы Гаусса. Заметим, что среди классических ортогональных многочленов только для многочленов Чебышёва первого и второго рода нули многочленов известны в аналитическом виде, поэтому такой способ построения оператора умножения на функцию в общем случае является приближенным.

Доказанные утверждения и теоремы дают обоснование решения линейной системы (4.4.4). Утверждение 2 и Теоремы позволяют оценить, когда эта система разрешима и какую она имеет обусловленность. Условие постоянства знака функции согласуется с тем,

что деление на функцию, обращающуюся в некоторой точке интервала в нуль, является недопустимым. Деление на функцию, близкую к нулю, приводит к плохой обусловленности линейной системы (4.4.4). Другой важный вывод состоит в том, что решение этой системы можно проводить итерационным методом Зейделя, т.к. симметричность и знакоопределенность матрицы является достаточным условием сходимости этого метода при любом начальном приближении. Задача вычисления квадратного корня из ряда находит обоснование и может быть сведена к вычислению квадратного корня из положительно определенной симметричной матрицы.

Оператор умножения на функцию, являясь самосопряженным оператором в вещественном евклидовом пространстве, имеет полный набор вещественных собственных значений и соответствующих собственных векторов, ортогональных между собой и образующих базис. Отсюда следует, что коммутативность операторов умножения на разные функции будет иметь место тогда и только тогда, когда для этих операторов существует единый набор собственных векторов. Собственные значения и векторы полностью определяют оператор и, таким образом, характеризуют исходную порождающую функцию. При этом базис содержит в себе определенную структурную информацию о функции, инвариантную к некоторым преобразованиям.

Пример. Построим оператор умножения на функцию в базисе полиномов Чебышёва первого рода.

Многочлены Чебышёва имеют явное тригонометрическое выражение:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (4.4.13)$$

Значения многочленов могут быть вычислены более рационально по рекуррентному соотношению:

$$T_0 = 1, \quad T_1 = x, \quad T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1} \quad n \geq 1. \quad (4.4.14)$$

Условие ортогональности и нормировки имеет вид

$$(T_i(x), T_j(x)) = \int_{-1}^1 \frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{\pi}{2}, & i = j \neq 0 \\ \pi, & i = j = 0 \end{cases} \quad (4.4.15)$$

Коэффициенты разложения произвольной функции $a(x)$ из E_N по полиномам Чебышёва находятся по квадратурным формулам Гаусса:

$$a_i = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^K a(x_j) T_i(x_j), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (4.4.16)$$

где узлы интегрирования совпадают с нулями полинома Чебышёва $T_K(x)$

$$x_j = \cos\left(\frac{\pi(j-\frac{1}{2})}{K}\right), \quad j = 1, \dots, K. \quad (4.4.17)$$

В результате преобразования (4.4.16) получается разложение, в котором нулевой коэффициент имеет удвоенное значение:

$$a(x) = \frac{a_0}{2} T_0(x) + \sum_{i=1}^{N-1} a_i T_i(x). \quad (4.4.18)$$

Непосредственно из формулы произведения косинусов

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

следует формула для разложения произведения двух полиномов Чебышёва

$$T_i T_j = \frac{1}{2} T_{|i-j|} + \frac{1}{2} T_{i+j}. \quad (4.4.19)$$

На основе этой формулы и формулы (4.4.1) попарного произведения членов двух рядов можно предложить следующий алгоритм вычисления произведения. Каждая пара $a_i b_j$ вносит аддитивный вклад в два коэффициента результирующего ряда $c_{|i-j|}$ и c_{i+j} с множителем $\frac{1}{2}$. Для произведения двух рядов, состоящих из N членов, потребуется по $2N^2$ операций умножения и сложения.

Для получения явных выражений для коэффициентов разложения произведения перемножим почленно два бесконечных ряда вида (4.4.18), применим формулу (4.4.19) и соберем коэффициенты при одинаковых полиномах:

$$c_i = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^{\infty} (a_j b_{j-i} + a_{j-i} b_j). \quad (4.4.20)$$

Для примера, при $N=5$ матрицы билинейных форм (10) для $i=0$ и $i=2$ имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перепишем билинейную форму (4.4.20) в виде линейной системы относительно неизвестного вектора коэффициентов a :

$$c_i = \frac{1}{2} a_0 b_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j (b_{|j-i|} + b_{j+i}). \quad (4.4.21)$$

Нормируем первый член последовательности ортогональных многочленов

$$\frac{T_0}{\sqrt{2}}, \quad T_1, \quad T_2, \dots, \quad (4.4.22)$$

для того чтобы они имели одинаковую норму. В этом базисе матрица оператора умножения на функцию принимает вид

$$\begin{pmatrix} \frac{b_0}{\sqrt{2}} & \frac{b_1}{\sqrt{2}} & \frac{b_2}{\sqrt{2}} & \frac{b_3}{\sqrt{2}} & \frac{b_4}{\sqrt{2}} \\ \frac{b_1}{\sqrt{2}} & \frac{b_0}{\sqrt{2}} + \frac{b_2}{2} & \frac{b_1}{2} + \frac{b_3}{2} & \frac{b_2}{2} + \frac{b_4}{2} & \frac{b_3}{2} \\ \frac{b_2}{\sqrt{2}} & \frac{b_1}{2} + \frac{b_3}{2} & \frac{b_0}{\sqrt{2}} + \frac{b_4}{2} & \frac{b_1}{2} & \frac{b_2}{2} \\ \frac{b_3}{\sqrt{2}} & \frac{b_2}{2} + \frac{b_4}{2} & \frac{b_1}{2} & \frac{b_0}{\sqrt{2}} & \frac{b_1}{2} \\ \frac{b_4}{\sqrt{2}} & \frac{b_3}{2} & \frac{b_2}{2} & \frac{b_1}{2} & \frac{b_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (4.4.23)$$

Построим матрицу умножения по схеме (4.4.11) при $K = N = 5$. После упрощений матрица принимает вид

$$\begin{pmatrix} \frac{b_0}{\sqrt{2}} & \frac{b_1}{\sqrt{2}} & \frac{b_2}{\sqrt{2}} & \frac{b_3}{\sqrt{2}} & \frac{b_4}{\sqrt{2}} \\ \frac{b_1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2} b_0 + b_2}{2} & \frac{b_1 + b_3}{2} & \frac{b_2 + b_4}{2} & \frac{b_3}{2} \\ \frac{b_2}{\sqrt{2}} & \frac{b_1 + b_3}{2} & \frac{\sqrt{2} b_0 + b_4}{2} & \frac{b_1}{2} & \frac{b_2 - b_4}{2} \\ \frac{b_3}{\sqrt{2}} & \frac{b_2 + b_4}{2} & \frac{b_1}{2} & \frac{b_0}{\sqrt{2}} - \frac{b_4}{2} & \frac{b_1 - b_3}{2} \\ \frac{b_4}{\sqrt{2}} & \frac{b_3}{2} & \frac{b_2 - b_4}{2} & \frac{b_1 - b_3}{2} & \frac{b_0}{\sqrt{2}} - \frac{b_2}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.4.24)$$

Заметим, что матрицы (4.4.23) и (4.4.24) различаются в правом нижнем углу. Первые два столбца этих матриц совпадают, т.е. умножение на полином первого порядка производится одинаково при любом определении оператора умножения. Это объясняется тем, что при вычислении N коэффициентов разложения элементов N - мерного подпространства полином подынтегрального выражения (2.7.3) имеет степень $2N - 2$. Квадратурные формулы Гаусса будут точными, даже если степень полинома подынтегрального выражения будет выше еще на единицу. По этой же причине оператор

умножения на многочлен первой степени имеет один и тот же вид при разных способах построения.

Вопросы и упражнения

1. Почему возникают два способа определения операции умножения?
2. Доказать, что в случае классических ортогональных многочленов $\delta_{ijk} = 0$, если $i + j < k$.
3. Получить выражение оператора умножения на x , исходя из рекуррентного соотношения.

4.5. Аналитические преобразования, позволяющие получать требуемые оценки и характеристики

Задачей числового этапа реализации обобщенного спектрально-аналитического метода является синтез адаптивных алгоритмов, обеспечивающих оптимальную (квазиоптимальную) аналитическую аппроксимацию входных сигналов в виде

$$x(t) = \sum_{n=0}^N A_n \varphi_n(t) \quad (4.5.1)$$

с минимальной длиной ряда независимо от физической природы поступающего сигнала. В выражении (4.5.1) коэффициенты разложения A_n , глубина разложения N и система ортогональных функций $\{\varphi_n(t)\}$ могут изменяться в зависимости от особенностей сигналов и их промежутков существования, но структура аналитического описания всегда остается постоянной. Использование ранее введенного понятия коэффициента формы обеспечивает при аппроксимации каждого сигнала выбор наиболее подходящего ортогонального базиса из числа заранее введенных в ЭВМ модифицированных классических ортогональных базисов. В автоматическом режиме на основе критерия близости значений коэффициентов формы поступающих сигналов и вычисленных заранее коэффициентов формы нулевых (или нескольких первых) взвешенных функций из введенных в память ЭВМ ортогональных базисов осуществляется конкретный выбор базиса. Кроме этого, каждый раз в автоматическом режиме происходит согласование длительности промежутка существования выбранного ортогонального базиса с длительностью аппроксимируемого сигнала. Заключительной адаптивной процедурой является достижение заданной точности аналитического описания сигналов минимально допустимой глубиной разложения N_{\min} , обеспечивающей необходимую точность. Выполнение предлагаемых адаптивных процедур приводит к оптимальному

(квазиоптимальному) аналитическому описанию сигнала из L^2 при достаточно широком ассортименте ортогональных базисов, введенных в ЭВМ.

Следующая важная особенность алгоритмической реализации первого этапа метода состоит в необходимости выполнения операций численного интегрирования с высокой точностью на цифровой ЭВМ при вычислении коэффициентов разложения. Это наиболее ответственный этап аналитического описания входных сигналов, так как погрешность, допускаемая при численном интегрировании, определяет не только последующую погрешность искомых оценок, но и приводит, вообще говоря, к нарушению условий ортогонального разложения сигналов, что также будет вызывать в дальнейших преобразованиях дополнительные погрешности. В связи с этим при разработке высокоточных алгоритмов вычисления интегралов в процессе нахождения коэффициентов разложения широко используются квадратурные методы. Последнее требует знания значений интегрируемых сигналов в квадратурных узлах. Это обстоятельство обусловило необходимость перехода от равномерных дискретных отсчетов, задающих обрабатываемый сигнал, к получению его в виде непрерывной функции с помощью формул интерполяции.

Исходными данными этапа аналитических преобразований являются результаты аналитического описания входных сигналов в виде отрезков ортогональных рядов. Поэтому можно заранее в общем виде путем соответствующих аналитических преобразований получать аналитические выводы (формулы), по которым, зная конкретные значения коэффициентов разложения, вычисляются необходимые характеристики и оценки. Упомянутые аналитические преобразования выполняются для каждого ортогонального базиса, по которому происходит разложение сигналов. Это обстоятельство никоим образом не ограничивает возможности получения требуемых оценок, так как всегда известна совокупность ортогональных базисов, введенных в ЭВМ, по которым будет производиться разложение сигналов, что позволяет заранее выполнить необходимые аналитические преобразования.

Вместе с тем практика показала, что выполнять различные аналитические преобразования с отрезками ортогональных рядов часто затруднительно, а получаемые формулы весьма громоздки и неудобны при реализации. Для преодоления данной трудности был предложен оригинальный прием, который позволил резко упростить аналитические преобразования и фактически сделать стандартными основные вычислительные операции и форму представления искомых оценок и характеристик. Существо указанного приема сводится к тому, что после выполнения необходимых аналитических преобразований с выражениями типа (4.5.1) и получения соответствующих

громоздких формул производится их аналитическое разложение в ряд по тем же ортогональным базисам. В результате такого разложения ортогональные функции исключаются из рассмотрения. Остаются только либо строгие аналитические зависимости между коэффициентами разложения искомым оценок и исходными коэффициентами разложения входного сигнала, либо получаются окончательные формулы для вычисления оценок по значениям коэффициентов разложения входного сигнала. В первом случае требуемые оценки или характеристики получаются по формуле, подобной выражению (4.5.1) при подстановке в него соответствующих коэффициентов разложения.

Пример. Пусть сигнал $x(t)$ разложен в ортогональный ряд

$$x(t) = \sum_{n=0}^N A_n \varphi_n(t), \quad (4.5.2)$$

тогда производная $x'(t)$ имеет вид $x'(t) = \sum_{n=0}^N A_n \varphi_n'(t)$. Разложим последнее выражение в ряд по ортогональным функциям $\varphi_n(t)$, то есть найдем коэффициенты разложения производной $x'(t)$

$$B_n = \int_0^T [A_0 \varphi_0'(t) + A_1 \varphi_1'(t) + \dots + A_n \varphi_n'(t)] \varphi_n(t) dt. \quad (4.5.3)$$

В частном случае, если $x(t)$ разложен в ряд по ортогональным функциям Лагерра, то есть $\varphi_n(t) = l_n(mt)$, легко показать, что в результате вычисления интеграла (4.3.3) получим

$B_n = -m \sum_{i=n+1}^N (i-n) A_i$. Тогда выражение для производной $x'(t)$ в стандартной форме

будет иметь вид

$$x'(t) = e^{-0,5mt} [-0,5m \sum_{n=0}^{N_1} A_n L_n(mt) + \sum_{n=0}^{N_1-1} B_n L_n(mt)]. \quad (4.5.4)$$

Пример. Пусть стационарные случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$ разложены в ортогональные ряды по функциям Лагерра, то есть $x(t) = \sum_{n=0}^N C_n l_n(mt)$ и $y(t) = \sum_{n=0}^N B_n l_n(mt)$. Можно

показать, что коэффициенты разложения D_n взаимной корреляционной функции $R_{x,y}(\tau)$ выражаются через коэффициенты разложения C_n и B_n случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$

следующей функциональной зависимостью $D_p = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{n=0}^N C_n (B_{n-p} - B_{n-p-1})$. Тогда

аналитическое выражение для взаимной корреляционной функции имеет вид

$$R_{x,y}(\tau) = \sum_{p=0}^N D_p l_p(m\tau). \quad (4.5.5)$$

Таким образом, аналитические выражения искомым оценок и характеристик всегда можно представить стандартным образом в форме отрезка ортогонального ряда, а коэффициенты разложения для этих оценок или характеристик определяются аналитическим путем точно через коэффициенты разложения исходных сигналов. Числовые показатели или оценки выражаются также через исходные коэффициенты разложения в виде конкретной формулы, которая программируется или заносится в ПЗУ. В выведенных заранее формулах исходные коэффициенты разложения записаны в общем виде. По мере разложения входных сигналов и вычисления конкретных значений коэффициентов разложения, последние направляются в соответствующие ячейки памяти. В результате вычислительные операции выполняются ЭВМ значительно быстрее и с большей точностью.

Техническая реализация отдельных операций, определяемых приведенной структурной схемой, имеет ряд вычислительных трудностей, преодоление которых существенно повысит ценность предлагаемого метода. К ним можно отнести, прежде всего, проблему вычисления коэффициентов разложения, которое приводит к необходимости численного интегрирования с высокой точностью за минимальное время. Как уже отмечалось, наилучшим вычислительным способом, обеспечивающим требуемую точность, является метод квадратур. На его основе разработана специальная программа, позволяющая вычислять до нескольких сотен коэффициентов разложения на микроЭВМ.

Альтернативным способом решения указанной трудности является построение специального вычислительного устройства. Последнее позволит существенно расширить область применения предлагаемого метода.

Проблемой, требующей своего решения, является расширение вычислительных возможностей метода и увеличение его универсальности, предполагающее распространение используемых подходов на новые предметные области исследований. На этом пути необходимо проведение работы в двух направлениях. Одно предполагает выведение новых аналитических зависимостей между коэффициентами разложения с целью получения необходимых оценок при разложении сигналов по тем ортогональным базисам, для которых такие зависимости и оценки еще не выведены и отсутствуют в специальном банке формул. Другое направление связано с расширением ассортимента оценок и характеристик при решении задач в новых научных областях, которые также не имеются в банке формул.

Решение задач оперативной обработки информационных массивов, сигналов различной природы содержит процедуры накопления сигналов, сглаживания высокочастотных помех, вычисления интегралов и производных от регистрируемых сигналов, суммирования, умножения и возведения в степень и ряда других операций. Аналогичные процедуры имеют место при решении задач регрессионного анализа, параметрической идентификации, диагностики состояния изучаемых объектов, а также в задачах анализа изображений и распознавания образов. В связи с этим следует в первую очередь выделить следующие типовые операции с информационными массивами: суммирование сигналов, их умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, процедуры статистического анализа, дифференцирование, интегрирование, решение дифференциальных и интегральных уравнений. Для всех упомянутых операций необходимо вывести аналитические соотношения в пространстве коэффициентов разложения и свести их в специальные таблицы. Выведенные ранее формулы помещены в таблицу и приведены в приложении.

4.6. Аналитическое описание изображений

В качестве основы предлагаемого подхода к решению задач анализа изображений и распознавания образов принят адаптивный численно-аналитический метод, развиваемый в предлагаемом пособии. Предполагается, что существенные для анализа характеристики изучаемого объекта могут быть представлены в виде совокупности одномерных кривых, и задача сводится к выявлению и использованию их наиболее информативных признаков. В настоящее время большинство математических методов описания и обработки изображений основано на использовании функций двух переменных. К ним можно отнести, прежде всего, ортогональные гармонические функции двух переменных (двумерные ряды Фурье). Главный недостаток этого подхода состоит в том, что работа с такими функциями требует больших затрат машинного времени. Значительные вычислительные сложности стоят также на пути применения ортогональных базисов двух переменных, получаемых из классических ортогональных базисов непрерывного или дискретного аргументов.

В последнее время в задачах цифровой обработки изображений широкое развитие получили методы, основанные на использовании дискретных ортогональных базисов двух переменных: функций Адамара, Уолша, Хаара и некоторых других. Это объясняется простотой реализации и удобством работы в данных базисах на ЭВМ. Этот

математический аппарат обеспечивает экономную цифровую обработку данных, но не дает возможности применять в рассматриваемых задачах аналитические методы.

Помимо указанных направлений в настоящее время применяется большое количество различных специализированных, алгоритмов анализа сигналов и распознавания образов. Их использование для отдельных классов сигналов и изображений может быть достаточно эффективным. Специализация таких технологий приводит к тому, что при анализе физически различных сигналов, но принадлежащих к одной прикладной области (например, анализ фотографий, анализ речи), приходится использовать различные приемы и подходы, что создает определенные сложности.

Предлагаемый здесь подход отличается от многих имеющихся, во-первых, адаптивностью к классу сигналов и изображений и, во-вторых, универсальностью. Настоящий метод основан на хорошо развитом математическом аппарате, предлагающем точную математическую формулировку задачи, в том числе доказательство сделанных эвристических допущений с точки зрения оптимальности и строгости применяемого математического аппарата. Имеются широкие возможности оптимизации предлагаемых алгоритмов, высокий уровень их адаптации, связанный с выбором системы координат и соответствующего ортогонального базиса в функциональном пространстве L_2 при аппроксимации сигналов. Характер используемых признаков пространств позволяет в процессе исследований получать оптимальные (наиболее информативные) наборы признаков (коэффициентов разложения) для данного класса сигналов. Имеется принципиальная возможность создания в перспективе автоматизированных компьютерных систем распознавания, анализа и диагностики исследуемых объектов в различных предметных областях.

Таким образом, как показывают многочисленные приложения, развиваемый подход наряду с универсальностью, обладает высоким быстродействием, повышенной точностью и экономичностью. При этом следует подчеркнуть, что обобщение разрабатываемого комбинированного численно-аналитического метода на плоские и пространственные задачи для разработки аналитических методов анализа изображений и распознавания образов допускает реализацию описания плоских и пространственных изображений системами параметрических уравнений одного аргумента. При этом все алгоритмы аналитического описания сигналов и их обработки, созданные для одномерного случая, легко обобщаются на плоские и пространственные задачи. Отличительной особенностью применения предлагаемого комбинированного численно-аналитического метода в задачах анализа изображений и распознавания образов является необходимость проведения весьма ответственной операции получения системы одномерных проекций исследуемых

изображений (векторизации изображений) для последующего адаптивного аналитического описания полученных проекций отрезками ортогональных рядов с использованием классических ортогональных базисов одного аргумента.

Аналитическое описание проекций исследуемых изображений в виде отрезков ортогональных рядов позволяет при относительно небольших вычислительных затратах использовать в полной мере силу аналитических методов в задачах описания изображений, их анализа и распознавания. Предлагаемый подход основан на следующих принципиальных положениях. Выполняется переход к параметрическому описанию (векторизации) изучаемого объекта. При этом объект описывается системой параметрических уравнений, зависящих от одного аргумента

$$x_i = X_i(t); i = 1, \dots, n. \quad (4.6.1)$$

Например, сигнал, описывающий изменение какой-либо величины во времени, представляется одним уравнением ($n = 1$), а плоская кривая (в частности, контур некоторого изображения) однозначно описывается системой двух уравнений

$$x = X(t); y = Y(t). \quad (4.6.2)$$

На следующем этапе полученные проекции аппроксимируются отрезками ортогональных рядов с заданной точностью (в равномерном или среднеквадратичном смысле)

$$X_i(t) = \sum_{k=0}^{N_i} C_{ik} P_k(t), \quad (4.6.3)$$

где C_{ik} - коэффициенты разложения функций $X_i(t)$ по известным ортонормированным функциям $P_k(t)$ выбранного базиса. В соответствии с развиваемым подходом предлагается выбирать систему $\{P_k\}$ из числа модифицированных классических ортогональных полиномов, стремясь при этом достичь заданной точности при минимально возможной длине ряда. Полученные таким образом разложения представляют собой аналитическое описание исходного объекта. Необходимая точность описания и, соответственно, число коэффициентов Фурье зависят от конкретной задачи. Для дальнейшей обработки определяющим является то обстоятельство, что в коэффициентах разложения содержится вся существенная информация об объекте. Это означает, что, зная коэффициенты разложения, можно вычислять требуемые характеристики объекта, не говоря уже о возможности прямого использования коэффициентов разложения в качестве признаков. Дальнейшее понижение размерности пространства признаков возможно через использование статистических свойств коэффициентов разложения данного класса изображений.

В пользу построения методов распознавания образов и анализа изображений, основанных на перечисленных положениях, можно высказать следующие соображения. Параметрическое описание многомерных объектов (например, плоских и пространственных кривых) позволяет свести задачу обработки многомерных данных к набору одномерных задач. При этом единственное условие на величину размерности системы, описывающей анализируемый объект, налагается требование однозначности описания всех объектов в классе, которому данный объект принадлежит. Адаптивное аналитическое описание каждой проекции наиболее подходящими ортогональными полиномами приводит к резкому уменьшению объема представления данных ("сжатию" данных). В процессе дальнейшей обработки данных используются аналитические выводы, которые можно проводить заранее, полностью исключая многократную обработку цифровых массивов на ЭВМ, а это существенно уменьшает неучитываемые ошибки округления. Предлагаемые процедуры обеспечивают полную обработку данных в "сжатом" виде, без восстановления первоначальной формы кривых, а также экономную передачу изображений по телеметрическим каналам и рациональное хранение фактографических данных в памяти ЭВМ.

В результате любая сложная плоская кривая, заданная системой (7.2), описывается аналитически, с любой наперед заданной точностью, системой уравнений вида

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N_x} A_k P_k(t), \quad y(t) = \sum_{k=0}^{N_y} B_k P_k(t), \quad (4.6.4)$$

где коэффициенты разложения A_k , B_k задаются интегралами

$$A_k = \int_a^b x(t) P_k(t) \rho(t) dt, \quad B_k = \int_a^b y(t) P_k(t) \rho(t) dt, \quad (4.6.5)$$

где $\rho(t)$ - весовая функция выбранного базиса $\{P_k\}$. Вычисление интегралов (4.4.5) - самая ответственная и трудоемкая операция спектрального анализа сигналов. Именно здесь осуществляется переход к функциям непрерывной переменной, дающий в дальнейшем возможность реализовать все преимущества аналитических преобразований.

Уравнения описывают особенности формы исследуемых плоских конфигураций, причем глубина разложения изменяется в зависимости от требуемой степени подробности описания формы. Так, получение общего представления о форме исследуемого объекта требует меньшего числа членов ортогонального ряда (несколько первых коэффициентов), а учет более мелких деталей формы приводит к увеличению глубины разложения.

Ортогональные функции в уравнениях не обязательно должны быть из одного семейства, однако в ряде случаев их принадлежность к одному базису оказывается полезной.

Возможности непосредственного получения аналитического описания плоских конфигураций различной сложности с использованием ортогональных функций иллюстрируются на рис. 4.6.1 и 4.6.2, на которых в качестве параметрических функций $x(t)$ и $y(t)$ взяты отдельные ортогональные полиномы Якоби с варьируемыми α и β и различными n . Все приведенные на рисунках плоские кривые имеют точное аналитическое описание через $x(t)$ и $y(t)$, которые, в свою очередь, имеют аналитические выражения, соответствующие выбранным базисным функциям Якоби с конкретными значениями α , β и n .

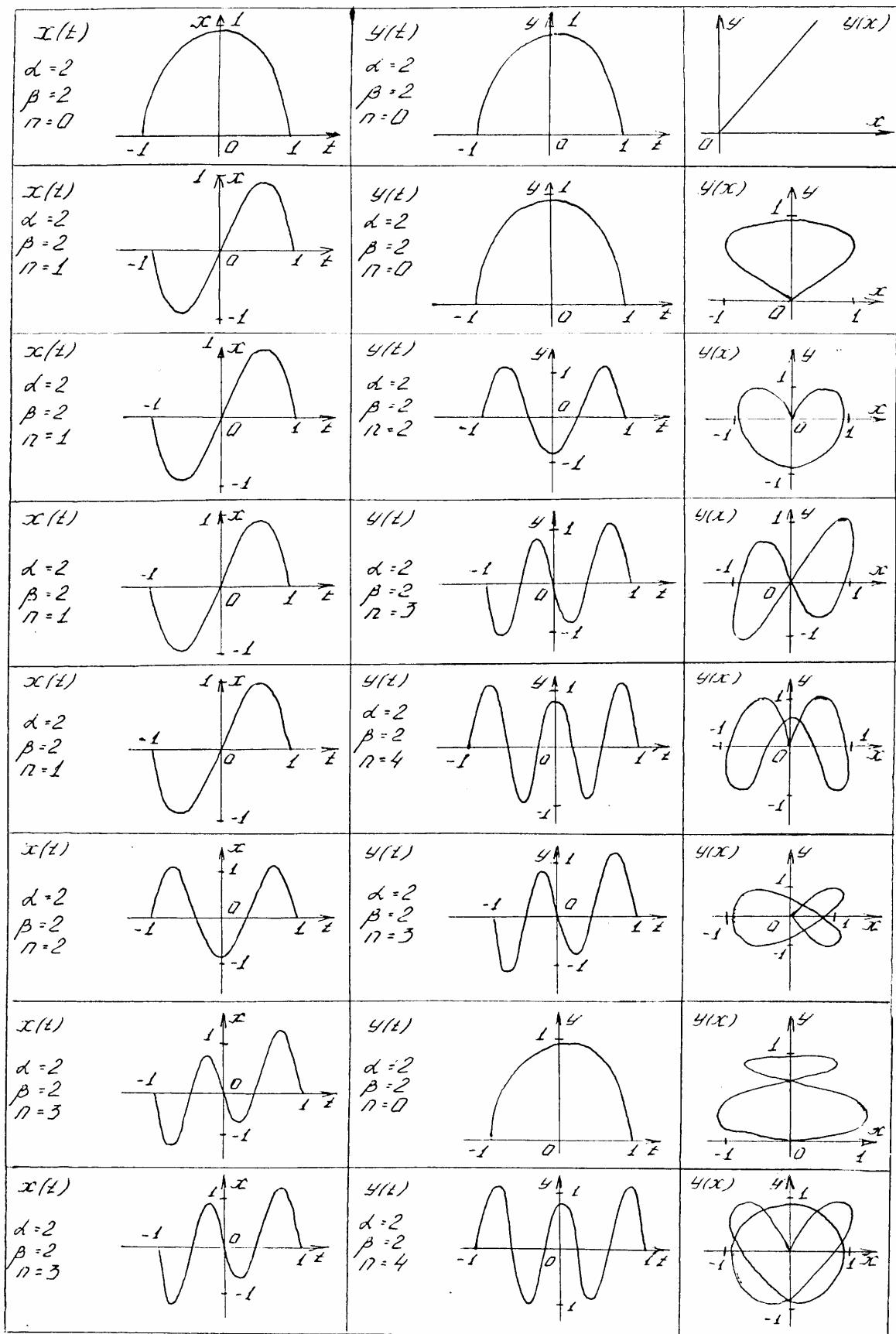


Рис.4.6.1.

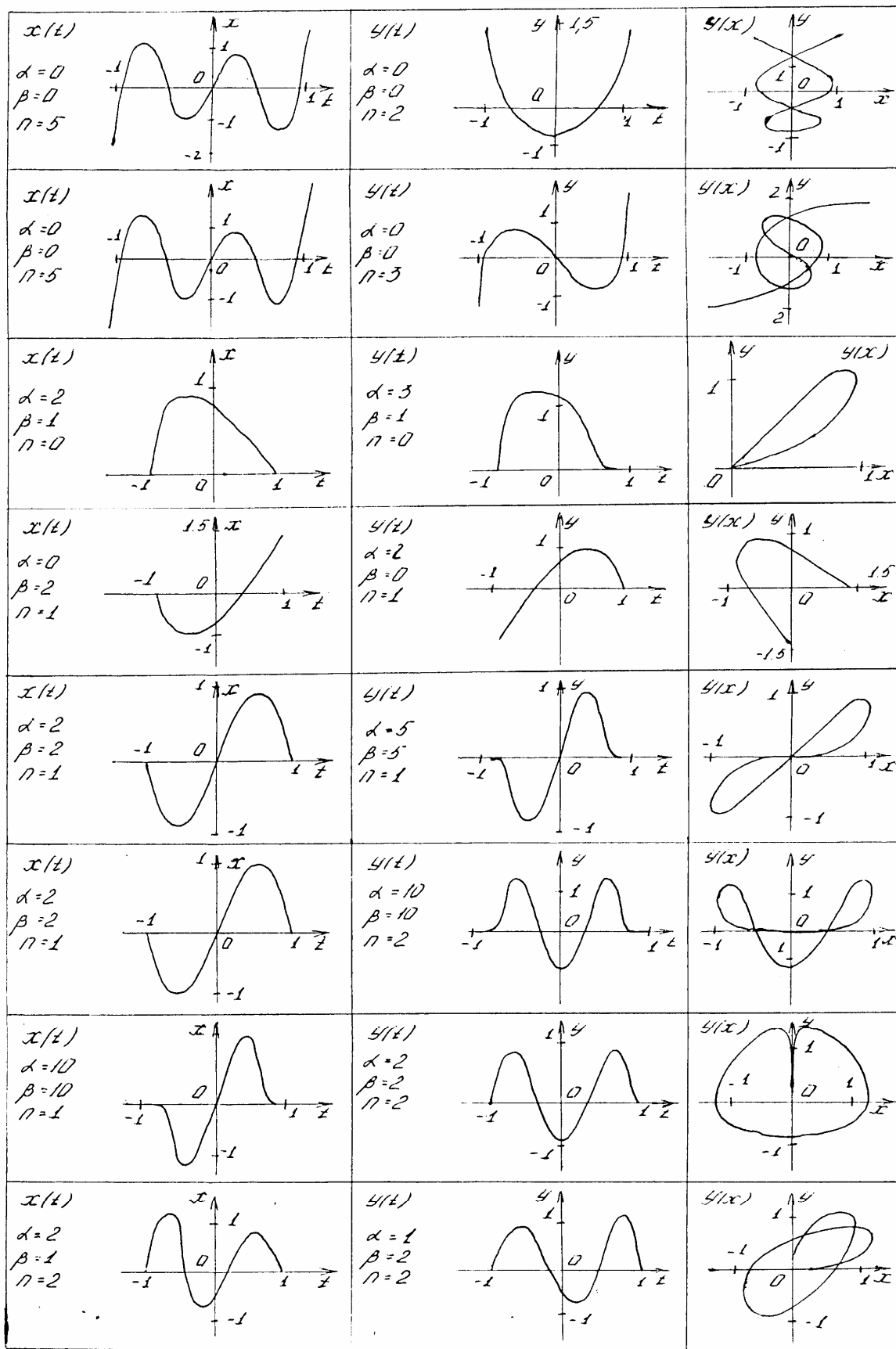


Рис. 4.6.2.

Приведенные примеры получения сложных плоских конфигураций можно существенно расширить. В практических задачах возможность аналитического представления $x(t)$ и $y(t)$ не только отдельными ортогональными функциями (как это показано на рисунках 4.6.1, 4.6.2), но и отрезками ортогональных рядов существенно увеличивает возможности аналитического описания плоских конфигураций с любой наперед заданной точностью.

Примеры получения плоских конфигураций, определяемых системами уравнений, не исчерпываются базисами Якоби. Проводимое изучение свойств других ортогональных базисов из числа классических свидетельствует об их весьма широких возможностях для анализа и синтеза сложных многомерных кривых, и при этом открываются новые способы их математического описания.

Переход к параметрическому заданию плоских и пространственных изображений [14,15] (векторизация изображений) требует выполнения некоторых дополнительных процедур, к которым относятся: выделение контурного изображения анализируемого объекта; векторизация изображения и подготовка проекций к виду, удобному для аналитического описания; оцифровка контурного изображения и определение начальной точки оцифровки; параметрическое задание контурного изображения в удобной системе координат. Выделение контура и его векторизация представляют собой самостоятельные задачи. Существует множество алгоритмов, которые удобно использовать в тех или иных конкретных случаях, в настоящее время они достаточно подробно описаны.

В некоторых задачах обработки (например, в компьютерной картографии) изображения задаются в виде последовательности пар чисел, которые и представляет собой искомую параметризацию. При векторизации растровых изображений необходимо применять специализированные программы. Для замкнутых контуров существует проблема стандартизации выбора начала отсчета параметра на контуре. Эту задачу можно решить при помощи оптимизации некоторого функционала, зависящего от начала отсчета.

В рамках адаптивного численно-аналитического метода обработки цифровые массивы, соответствующие функциям $x(t)$ и $y(t)$, необходимо аппроксимировать аналитическими выражениями вида (4.6.4). Реализация алгоритмов распознавания с использованием разложений контура объекта в ортогональные ряды на этапе предобработки предполагает использование того или иного алгоритма векторизации. Здесь и далее под векторизацией будем понимать процедуру перехода от исходного двумерного изображения к одному вектору или совокупности двумерных векторов определенной длины. Наиболее важен в отношении рассматриваемых приложений частный случай векторизации - оконтуривание объекта и параметризация полученного

контура. Алгоритм должен обладать достаточной общностью и не зависеть от конкретного класса изображений и характера его деталей.

Более подробные описания методов проведения векторизации и оцифровки контурных изображений приводятся в работах [30].

Описания сложных контурных объектов

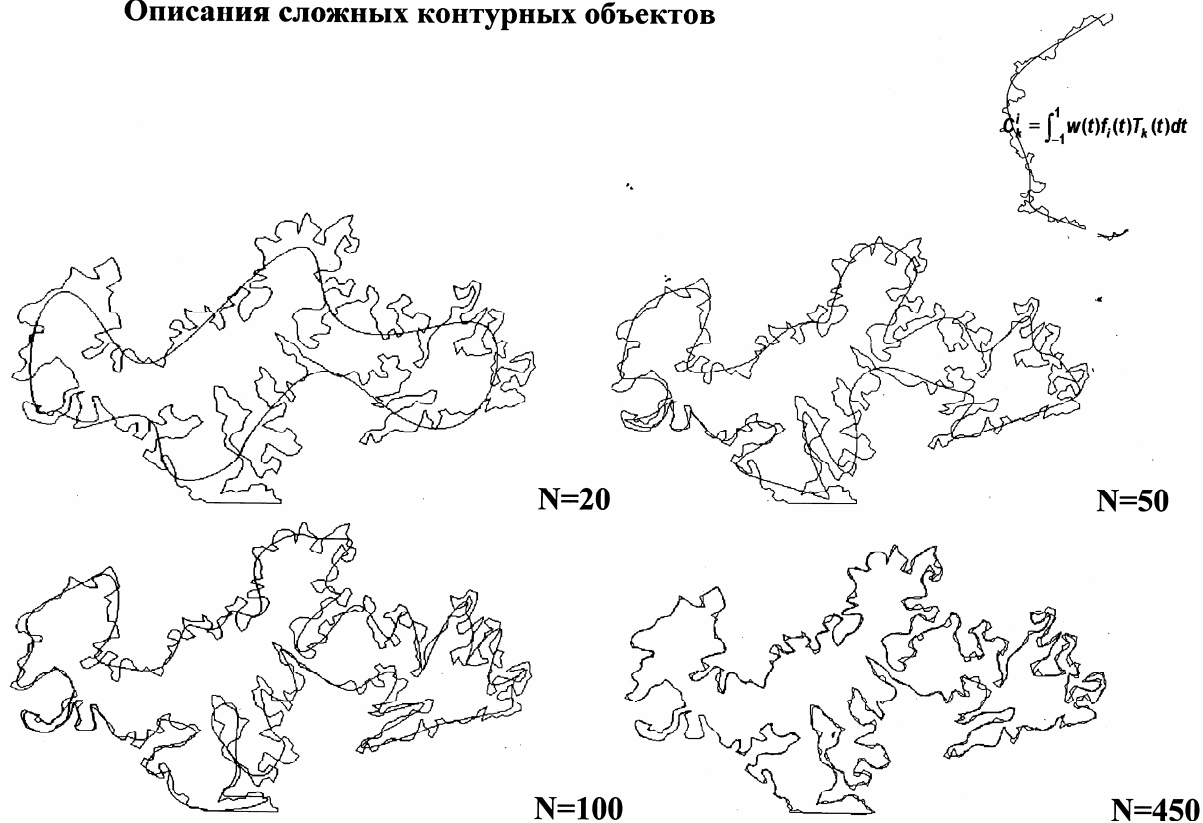


Рис. 4.6.3.

4.7. Инвариантные соотношения. Алгоритмы анализа изображений, распознавания образов и сцен

Перейдем к выводу аналитических зависимостей, позволяющих реализовать полное распознавание изображений. Прежде отметим некоторые особенности поставленной задачи. Не снижая общности рассуждений, примем следующие положения: рассматривается плоское изображение; принята прямоугольная система координат; используется параметрическая форма задания изображений. В этом случае для аналитического описания контурного изображения предварительно необходимо перейти к

параметрическому заданию контура, то есть выполнить его векторизацию. В результате контур однозначно будет описываться системой двух параметрических уравнений

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad (4.7.1)$$

где t - параметр, в данном случае - длина. Иначе эту операцию называют векторизацией контурного изображения, так как годограф вектора $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t)$ при изменении от $t = 0$ до $t = T$ описывает заданный контур. В результате операции векторизации контура формируются массивы данных $x(t)$ и $y(t)$, аналитическая аппроксимация которых приводит к аналитическому описанию контурного изображения с любой наперед заданной точностью. Заметим, что для аналитического описания изображения совершенно безразлично, какая точка на контуре будет принята за начало отсчета. Однако, при произвольном изменении точки отсчета на контуре, проекции будут изменяться, но в любом случае они будут точно описывать рассматриваемое контурное изображение. Это же можно отметить и для коэффициентов разложения A_n и B_k , которые являются также функциями начальной точки отсчета.

Один из вариантов нахождения инвариантных соотношений для распознавания состоит в том, чтобы каким-либо приемом находить на конкретном изображении "особую" точку и принимать ее за начальную точку оцифровки контура, то есть $t = 0$. Условимся, что движение по кривой от начальной точки отсчета для векторизации контура будет всегда происходить по часовой стрелке. Выполнение принятых условий обеспечит нахождение инвариантных соотношений при распознавании контурных изображений.

Итак, в результате векторизации контурного объекта получено его параметрическое задание в виде системы уравнений (4.7.1). Вычислим коэффициенты разложения соответственно A_n для проекции $x(t)$ и B_k для проекции $y(t)$

$$A_n = \int_0^T x(t)\varphi_n(t)dt, B_k = \int_0^T y(t)\varphi_k(t)dt. \quad (4.7.2)$$

При повороте изображения на угол (против часовой стрелки) в прямоугольной системе координат новые проекции $\bar{x}(t)$ и $\bar{y}(t)$, в соответствии с известными формулами, будут выражаться через старые $x(t)$ и $y(t)$ следующим образом [32]:

$$\bar{x}(t) = x(t)\cos\alpha - y(t)\sin\alpha, \bar{y}(t) = x(t)\sin\alpha + y(t)\cos\alpha.$$

В соответствии с (4.7.2) вычислим новые коэффициенты разложения

$$\begin{aligned}\bar{A}_n &= \int_0^T \bar{x}(t) \varphi_n(t) dt = \int_0^T x(t) \cos \alpha \varphi_n(t) dt - \int_0^T y(t) \sin \alpha \varphi_n(t) dt = \\ &= A_n \cos \alpha - B_n \sin \alpha.\end{aligned}\quad (4.7.3)$$

По аналогии получим

$$\bar{B}_k = A_k \sin \alpha + B_k \cos \alpha. \quad (4.7.4)$$

В результате находим связь новых коэффициентов разложения \bar{A}_n и \bar{B}_k со старыми вида:

$$\bar{A}_n = A_n \cos \alpha - B_n \sin \alpha, \quad \bar{B}_k = A_k \sin \alpha + B_k \cos \alpha. \quad (4.7.5)$$

Если же рассматриваемое плоское изображение не только повернулось относительно своего начального положения на угол, но и переместилось из точки (x_0, y_0) в точку (x, y) , то его новые проекции будут иметь вид

$$\bar{x}(t) = x_0 + x(t) \cos \alpha - y(t) \sin \alpha, \quad \bar{y}(t) = y_0 + x(t) \sin \alpha + y(t) \cos \alpha.$$

Найдем коэффициенты разложения по аналогии с выражениями (4.7.3), (4.7.4) для случая произвольного положения фигуры

$$\bar{A}_n = A_0^0 + A_n \cos \alpha - B_n \sin \alpha, \quad \bar{B}_k = B_0^0 + A_k \sin \alpha + B_k \cos \alpha. \quad (4.7.6)$$

Отличие от нуля коэффициентов разложения A_0^0 и B_0^0 свидетельствует о том, что анализируемое изображение переместилось относительно начала координат по сравнению с исходным положением. По значениям A_0^0 и B_0^0 можно определить с точностью до ΔA_0 и ΔB_0 величину, на которую переместился объект, и новые координаты местонахождения его геометрического центра. На следующем шаге необходимо отыскать угол поворота объекта, исходя из знания новых и старых коэффициентов разложения. Из первого уравнения системы (4.7.5) получим $A_n \cos \alpha = \bar{A}_n + B_n \sin \alpha$, откуда следует

$\cos \alpha = \frac{\bar{A}_n}{A_n} + \frac{B_n}{A_n} \sin \alpha$. Подставим значение $\cos \alpha$ во второе уравнение системы (4.7.5)

$$\bar{B}_k = A_k \sin \alpha + B_k \left[\frac{\bar{A}_n}{A_n} + \frac{B_n}{A_n} \sin \alpha \right].$$

После ряда преобразований окончательно получим

$$\sin \alpha = \frac{A_n \bar{B}_k - \bar{A}_n B_k}{A_n A_k + B_n B_k}. \quad (4.7.7)$$

Аналогично находим

$$\cos \alpha = \frac{\bar{A}_n A_k + \bar{B}_n B_k}{A_n A_k + B_n B_k}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{A_n \bar{B}_k - \bar{A}_n B_k}{A_n A_k + B_n \bar{B}_k}. \quad (4.7.8)$$

Следует подчеркнуть, что угол поворота контурного изображения определяется по коэффициентам разложения с одинаковыми индексами, поэтому формулы (4.7.7) и (4.7.8) окончательно записываются в виде

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{A_n \bar{B}_n - \bar{A}_n B_n}{A_n^2 + B_n^2}; \\ \cos \alpha &= \frac{\bar{A}_n A_n + \bar{B}_n B_n}{A_n^2 + B_n^2}; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{A_n \bar{B}_n - \bar{A}_n B_n}{\bar{A}_n A_n + \bar{B}_n B_n}.\end{aligned}\tag{4.7.9}$$

Таким образом, по известным новым и старым коэффициентам разложения можно определить угол поворота распознаваемого объекта относительно исходного положения.

При распознавании необходимо убедиться, что коэффициенты разложения (старые и новые) принадлежат одному и тому же изображению. Поэтому следует найти соотношения, по которым можно установить соответствие коэффициентов разложения распознаваемому объекту. Для этого возведем в квадрат левые и правые части уравнений (7.17), принимая для простоты $A_0^0 = B_0^0 = 0$, в результате получим

$$\begin{aligned}\bar{A}_n^2 &= (A_n \cos \alpha - B_n \sin \alpha)^2 = A_n^2 \cos^2 \alpha + B_n^2 \sin^2 \alpha - 2A_n B_n \sin \alpha \cos \alpha; \\ \bar{B}_n^2 &= (A_n \sin \alpha + B_n \cos \alpha)^2 = B_n^2 \cos^2 \alpha + A_n^2 \sin^2 \alpha + 2A_n B_n \sin \alpha \cos \alpha.\end{aligned}$$

Складывая левые и правые части уравнений, находим

$$\bar{A}_n^2 + \bar{B}_n^2 = A_n^2 + B_n^2,\tag{4.7.10}$$

то есть сумма квадратов коэффициентов разложения для новых и старых проекций постоянна. Условие (4.7.10) является инвариантным по отношению к угловому положению контурного изображения, то есть, на какой бы угол ни было повернуто контурное изображение относительно исходного состояния для данного изображения, суммы квадратов новых и старых коэффициентов разложения с номерами n будут неизменны. Очевидно, справедливо выражение

$$\sum_{n=1}^N (A_n^2 + B_n^2) = \sum_{n=1}^N (\bar{A}_n^2 + \bar{B}_n^2) = \text{const},\tag{4.7.11}$$

которое остается неизменным для данного изображения. Коэффициенты разложения A_0 и B_0 в равенстве (4.7.11) не учитываются, так как они определяют положение изображения на плоскости и будут использоваться в процессе распознавания для определения местоположения изображения.

Вообще, для обеспечения одинаковой точности аналитического описания проекций $x(t)$ и $y(t)$ количество требуемых коэффициентов разложения для каждой проекции может быть различным. В то же время для определения угла поворота контурного изображения относительно исходного положения (положение изображения в режиме обучения алгоритма) целесообразно использовать коэффициенты разложения с одинаковыми индексами. Это будет соответствовать одним и тем же составляющим (например, линейным, параболическим и др.), образующим проекции $x(t)$ и $y(t)$. Какие именно составляющие следует использовать для оценки угла поворота изображения, необходимо решать в каждом конкретном случае. Возможно, это будет соответствовать условию максимального значения по абсолютной величине пары коэффициентов разложения с одинаковыми индексами.

В соответствии с полученными аналитическими соотношениями и условиями инвариантности предлагается следующая схема распознавания плоских контурных изображ

Алгоритм распознавания в режиме обучения. Предполагается, что все контурные изображения, которые будут предъявляться к распознаванию, введены в ЭВМ в виде цифровых массивов данных. Следует выполнить следующие операции:

- определить точку начала отсчета на каждом контурном изображении и выполнить их оцифровку;

- выполнить последовательно векторизацию контурных изображений и оцифровать их проекции $x(t)$ и $y(t)$ параметрического представления;

- вычислить коэффициенты разложения A_{ni} проекции $x_i(t)$ и B_{ni} проекции $y_i(t)$, при этом глубина разложения всех проекций должна обеспечивать заданную точность распознавания, то есть для каждой проекции число коэффициентов разложения определяется требованиями четкого описания деталей анализируемых изображений, которые следует учитывать при распознавании.

- по коэффициентам разложения с нулевыми индексами A_{0i} и B_{0i} определить координаты геометрического центра i -тых изображений $x_{0i} = A_{0i}\varphi_0$, $y_{0i} = B_{0i}\varphi_0$;

- вычислить значения $\sum_{n=1}^N A_{ni}^2$ и $\sum_{n=1}^N B_{ni}^2$, по которым, в соответствии с равенством

Парсеваля, определяется необходимая точность аппроксимации i -тых проекций, а также для каждого значения n вычислить суммы

$$H_{ni} = A_{ni}^2 + B_{ni}^2, \quad n = 1, 2, \dots, N; \quad i = 1, 2, \dots, J, \quad (4.7.12)$$

где J - число анализируемых изображений; а также полные суммы

$$H_{\Sigma i} = \sum_{n=1}^N A_{ni}^2 + B_{ni}^2, \quad i = 1, 2, \dots, J, \quad (4.7.13)$$

которые являются обобщенными признаками для каждого i -ого объекта. Суммы (4.7.12) и (4.7.13) инвариантны к изменению углового положения контурного объекта. Указанными вычислениями завершаются подготовительные операции для последующего решения задачи распознавания. Такие предварительные расчеты проводятся на этапе обучения для всех изображений, которые будут предъявляться к распознаванию.

Работа алгоритма в режиме распознавания. Все изображения, предъявленные к распознаванию, обрабатываются в любой последовательности по следующему алгоритму.

1. Определяется начальная точка отсчета и оцифровка i -го контурного изображения.
2. Выполняется векторизация изображения, то есть получение проекций $\bar{x}_i(t)$ и $\bar{y}_i(t)$.
3. Вычисляются коэффициенты разложения проекций, количество которых определяется заданной точностью распознавания.
4. Вычисляются значения \bar{A}_{ni}^2 и \bar{B}_{ni}^2 .
5. Вычисляются суммы $H_{\Sigma i}$ и H_{ni} , по которым происходит первичное распознавание предъявленного изображения.
6. Зная коэффициенты разложения A_0 и B_0 , вычисленные при обучении алгоритма, и новые \bar{A}_0 и \bar{B}_0 , определяются координаты местонахождения изображения.
7. Используя значения коэффициентов разложения A_{ni} , B_{ni} и \bar{A}_{ni} и \bar{B}_{ni} , определяется текущее угловое положение распознаваемого объекта по одной из формул.

Рассмотрим пример работы предлагаемого алгоритма. Пусть к распознаванию предъявляются изображения следующих фигур: №1 - треугольник (рис. 4.7.1, а), №2 - овал (рис. 4.7.1, б), №3 - трапеция (рис. 4.7.1, в). Для удобства их линейные размеры масштабируются, чтобы площади фигур были соизмеримы. В режиме обучения каждый объект подвергается векторизации. Начальная точка оцифровки для каждой фигуры определяется как наиболее удаленная точка от геометрического центра фигуры. После оцифровки для каждой пары проекций

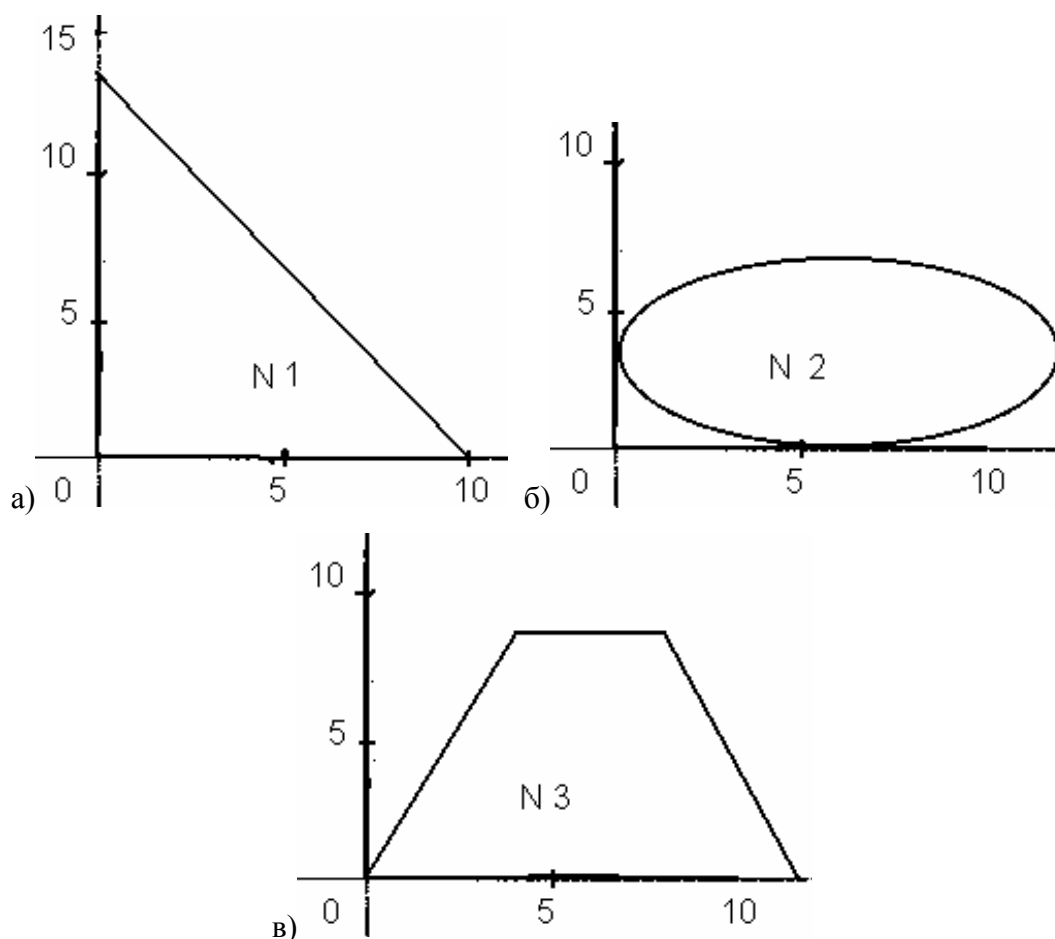


Рис. 4.7.1.

$x_1(t)$ и $y_1(t)$, $x_2(t)$ и $y_2(t)$, $x_3(t)$ и $y_3(t)$ вычисляются по 10 значениям коэффициентов разложения A_{n1} и B_{n1} ; A_{n2} и B_{n2} , A_{n3} и B_{n3} по формулам (4.7.2). Затем определяются суммы квадратов n -ых исходных коэффициентов разложения по формуле (4.7.12) H_{n1} , H_{n2} и H_{n3} и, наконец, общие суммы для каждой из фигур (формула 4.7.13) $H_{\Sigma 1}$, $H_{\Sigma 2}$ и $H_{\Sigma 3}$. По коэффициентам разложения A_{0i} и B_{0i} находятся исходные координаты геометрического центра каждого анализируемого изображения

$$x_{0i} = A_{0i}\varphi_0, \quad y_{0i} = B_{0i}\varphi_0. \quad (4.7.14)$$

Можно вычислить и точность, с которой распознается каждый объект, но для простоты здесь этого делать не будем. Результаты расчетов в режиме обучения приведены в таблице 4.7.1.

В режиме распознавания для каждой фигуры повторяются все вычисления (формулы (4.7.11), (4.7.12), (4.7.13)). По значению $H_{\Sigma i}$ предварительно определяется распознаваемый объект и ему присваивается соответствующий номер. Затем по значению частных сумм H_{ni} уточняется распознаваемый объект. Определяется новое место нахождения каждого объекта (4.7.14) и его угловое положение по отношению к исходному. В случае необходимости по известным углам производится пересчет

коэффициентов разложения из текущих к первоначальным значениям, вычисленным в режиме обучения, и сравнение их между собой. Совпадение коэффициентов разложения, относящихся к определенной фигуре, окончательно подтверждает правильность распознавания. Результаты расчетов в режиме распознавания предъявленных фигур приведены в таблице 4.7.2. Приводятся значения новых коэффициентов разложения проекций фигур, суммы квадратов n-ных коэффициентов, общие суммы, углы поворотов фигур относительно исходного положения и новые координаты геометрических центров фигур. На рис. 4.7.2 приведено расположение фигур в момент их распознавания.

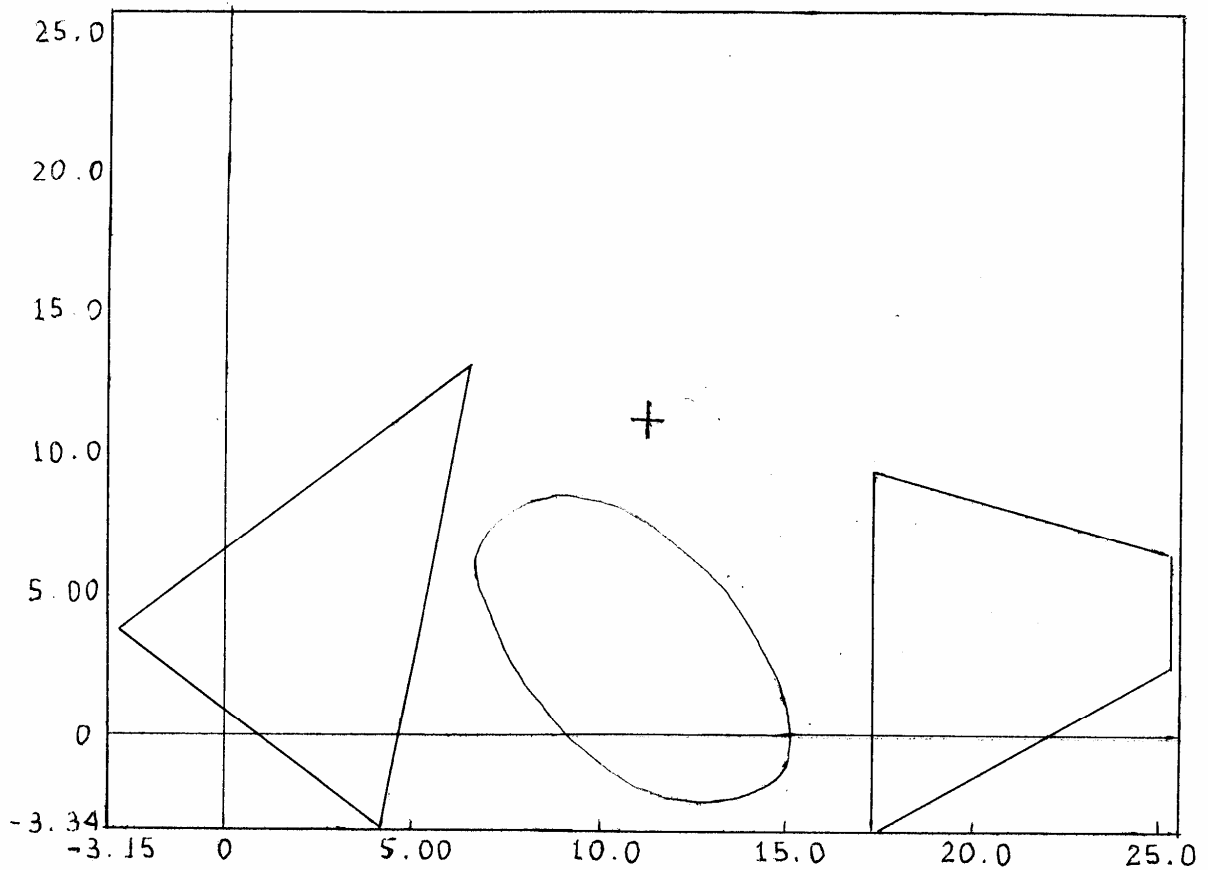


Рис. 4.7.2

Таблица 4.7.1.

| Фигура 1 | | |
|----------|-------|-------|
| A_k | B_k | H_k |
| -2,27 | -0,75 | 5,75 |
| -2,86 | 6,14 | 45,92 |
| 2,42 | 0,67 | 6,34 |
| 0,93 | -0,71 | 1,38 |
| -1,21 | -0,18 | 1,50 |

| | | |
|--|-------|-------|
| -0,51 | -0,02 | 0,26 |
| 0,62 | -0,04 | 0,39 |
| 0,27 | 0,16 | 0,10 |
| -0,29 | 0,14 | 0,10 |
| HS=61,77 | | |
| Координаты “взвешенного” центра: $x = 3,33$ $y = 5,04$ | | |
| Фигура 2 | | |
| A_k | B_k | H_k |
| -0,00 | -2,78 | 7,74 |
| -5,33 | 0,01 | 28,43 |
| -0,00 | 1,99 | 3,99 |
| 1,30 | 0,00 | 1,71 |
| -0,00 | -0,30 | 0,09 |
| -0,37 | -0,02 | 0,14 |
| 0,00 | 0,28 | 0,08 |
| 0,32 | 0,01 | 0,10 |
| -0,00 | -0,14 | 0,02 |
| HS=42,33 | | |
| Координаты “взвешенного” центра: $x = 6,00$ $y = 3,18$ | | |
| Фигура 3 | | |
| A_k | B_k | H_k |
| 3,44 | -2,18 | 16,65 |
| -3,41 | -2,94 | 20,34 |
| -2,79 | 1,99 | 11,76 |
| -0,64 | 0,63 | 0,81 |
| 0,20 | -0,53 | 0,33 |
| 0,29 | -0,10 | 0,09 |
| 0,44 | 0,04 | 0,20 |
| 0,15 | -0,08 | 0,03 |
| -0,30 | 0,04 | 0,09 |
| HS=50,34 | | |
| Координаты “взвешенного” центра: $x = 6,01$ $y = 3,64$ | | |

Таблица 4.7.2

| A_k | B_k | H_k |
|--|-------|-------|
| -2,41 | -1,39 | 7,74 |
| -2,65 | 4,62 | 28,43 |
| 1,73 | 1,00 | 3,99 |
| 0,65 | -1,13 | 1,71 |
| -0,26 | -0,15 | 0,09 |
| -0,20 | 0,31 | 0,14 |
| 0,24 | 0,13 | 0,08 |
| 0,17 | -0,27 | 0,10 |
| -0,12 | -0,07 | 0,02 |
| <p>HS=42,33 Это фигура 2</p> <p>Угол поворота -60°</p> <p>Координаты “взвешенного” центра: $x = 10,94$ $y = 3,09$</p> | | |
| A_k | B_k | H_k |
| -2,14 | 1,07 | 5,75 |
| 2,31 | 6,36 | 45,92 |
| 2,19 | -1,24 | 6,34 |
| 0,15 | -1,16 | 1,38 |
| -0,98 | 0,72 | 1,50 |
| -0,37 | 0,35 | 0,26 |
| 0,40 | -0,47 | 0,39 |
| 0,31 | -0,07 | 0,10 |
| -0,11 | 0,30 | 0,10 |
| <p>HS=61,77 Это фигура 1</p> <p>Угол поворота -45°</p> <p>Координаты “взвешенного” центра: $x = 3,05$ $y = 5,04$</p> | | |
| A_k | B_k | H_k |
| -2,18 | -3,44 | 16,65 |
| -2,94 | 3,41 | 20,34 |
| 1,99 | 2,79 | 11,76 |
| 0,63 | 0,64 | 0,81 |

| | | |
|--|-------|------|
| -0,53 | -0,20 | 0,33 |
| -0,10 | -0,29 | 0,09 |
| 0,04 | -0,44 | 0,20 |
| -0,08 | -0,15 | 0,03 |
| 0,04 | 0,30 | 0,09 |
| HS=50,34 Это фигура 3 Угол поворота -90° | | |
| Координаты “взвешенного” центра: x = 20,97 y = 3,48 | | |

Таким образом, анализируя коэффициенты разложения, полученные как при обучении алгоритма, так и в процессе распознавания, с учетом полученных для них инвариантных соотношений, можно уверенно распознавать предъявляемые объекты и их положение на плоскости. Предлагаемые алгоритмы основаны на строгих аналитических соотношениях, использующих только коэффициенты разложения, и не требуют восстановления изображения в первоначальном виде для его распознавания. В то же время, в случае необходимости, изображения могут быть всегда воспроизведены на основании полученной системы уравнений

$$x_i(t) = \sum_{k=0}^{N_x} A_{ki} \varphi_k(t), \quad y_i(t) = \sum_{k=0}^{N_y} B_{ki} \varphi_k(t).$$

Анализируя работу алгоритма распознавания, следует подчеркнуть, что относительно малое количество коэффициентов разложения (за счет процедур адаптации достигается существенное "сжатие" объема данных) и использование простейших аналитических соотношений позволяют решать задачи распознавания за время, соизмеримое с временем, затрачиваемым на вычисление коэффициентов разложения. В связи с этим появляется возможность эффективного решения, как в статике, так и в динамике задач анализа сцен и распознавания их объектов.

В заключение следует сказать, что аналогичные инвариантные соотношения сохраняются для трех и более размерных изображений, и будут иметь вид

$$A_n^2 + B_n^2 + C_n^2 + D_n^2 + \dots = \bar{A}_n^2 + \bar{B}_n^2 + \bar{C}_n^2 + \bar{D}_n^2 + \dots,$$

$$\sum_{n=1}^N (A_n^2 + B_n^2 + C_n^2 + D_n^2 + \dots) = \sum_{n=1}^N (\bar{A}_n^2 + \bar{B}_n^2 + \bar{C}_n^2 + \bar{D}_n^2 + \dots),$$

где размерность изображения определяется числом коэффициентов разложения, обозначенных разными буквами. Вычисление же нового углового положения распознаваемого объекта можно будет определять лишь численным путем при выполнении ряда специальных условий.

Приложение 1. Модифицированные классические ортогональные базисы

| № п/п | Название многочлена | Общее выражение | Вес $p(x)$ | Интервал существова- ния |
|----------|--|---|--|--------------------------------|
| 1 | Смещенные полиномы Якоби $R_n^{\alpha\beta}(x)$ | $\sqrt{\frac{(\alpha + \beta + 2n + 1)\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\beta + n + 1)}{2^{\alpha+\beta} T n!}} \times$ $\times \frac{1}{T^n} \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k (x - T)^k x^{n-k}}{\Gamma(\alpha + k + 1)\Gamma(\beta + n - k + 1)}$ | $\frac{2^{\alpha+\beta}}{T^{\alpha+\beta}} (T - x)^\alpha x^\beta$ $\alpha > -1, \beta > -1$ | $(0, T)$ |
| | $R_n^{\alpha\beta}(mx)$ | $\sqrt{\frac{m(\alpha + \beta + 2n + 1)\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\beta + n + 1)}{2^{\alpha+\beta} n!}} \times$ $\times \frac{1}{T^n} \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k (-1)^k e^{-(0.5+k)mx} (1 - e^{-mx})^{n-k}}{\Gamma(\alpha + k + 1)\Gamma(\beta + n - k + 1)}$ | $\frac{2^{\alpha+\beta}}{T^{\alpha+\beta}} e^{-\alpha mx} \times$ $\times (1 - e^{-mx})^\beta$ $\alpha > -1, \beta > -1$ | $(0, \infty)$ |
| 2 | Смещенные функции Якоби $Y_n^{\alpha\beta}(x)$ | $\sqrt{\frac{(\alpha + \beta + 2n + 1)\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\beta + n + 1)}{T^{2n+\alpha+\beta+1} n!}} \times$ $\times \frac{1}{T^n} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k (T - x)^{\alpha/2+k} x^{\beta/2+n-k}}{\Gamma(\alpha + k + 1)\Gamma(\beta + n - k + 1)}$ | 1 $\alpha > -1, \beta > -1$ | $(0, T)$ |
| | $Y_n^{\alpha\beta}(mx)$ | $\sqrt{\frac{m(\alpha + \beta + 2n + 1)\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\beta + n + 1)}{n!}} \times$ $\times \frac{1}{T^n} \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k (-1)^k e^{-(0.5+k+\alpha/2)mx} (1 - e^{-mx})^{n-k}}{\Gamma(\alpha + k + 1)\Gamma(\beta + n - k + 1)}$ | 1 $\alpha > -1, \beta > -1$ | $(0, \infty)$ |

| | | | | |
|---|---|---|--|---------------|
| 3 | Смещенные полиномы Гегенбауэра $C^\sigma(x, T)$ | $\sqrt{\frac{(\sigma+n)\Gamma(2\sigma+n)}{2^{2\sigma-2}Tn!}} \frac{\Gamma(\sigma+n+0.5)}{T^n} \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k (x-T)^k x^{n-k}}{\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(\beta+n-k+1)}$ | $\frac{2^{2\sigma-1}}{T^{2\sigma-1}} (T-x)^{\sigma-0.5} x^{\sigma-0.5}$ $\alpha=\beta=\sigma-0.5$ | $(0, T)$ |
| | $C^\sigma(mx)$ | $\sqrt{\frac{(\sigma+n)\Gamma(2\sigma+n)}{2^{2\sigma-2}n!}} \Gamma(\sigma+n+0.5) \times$ $\times \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k e^{-(0.5+k)mx} (1-e^{-mx})^{n-k}}{\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(\beta+n-k+1)}$ | $2^{2\sigma-1} e^{-(\sigma-0.5)mx} \times$ $\times (1-e^{-mx})^{\sigma-0.5}$ $\alpha=\beta=\sigma-0.5$ | $(0, \infty)$ |
| 4 | Смещенные функции Гегенбауэра $g^\sigma(x, T)$ | $\sqrt{\frac{2(\sigma+n)\Gamma(2\sigma+n)}{2^{2\sigma-2}n!}} \Gamma(\sigma+n+0.5) \times$ $\times \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k (T-x)^{k+\frac{\sigma-0.5}{2}} x^{n-k+\frac{\sigma-0.5}{2}}}{\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(\beta+n-k+1)}$ | 1 $\alpha=\beta=\sigma-0.5$ | $(0, T)$ |
| | $g^\sigma(mx)$ | $\sqrt{\frac{(\sigma+n)\Gamma(2\sigma+n)}{n!}} \Gamma(\sigma+n+0.5) \times$ $\times \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k e^{-\frac{\sigma+0.5+2k}{2}mx} (1-e^{-mx})}{\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(\beta+n-k+1)}$ | 1 $\alpha=\beta=\sigma-0.5$ | $(0, \infty)$ |
| 5 | Смещенные полиномы Чебышева I рода $T_n(x, T)$ | $\sqrt{\frac{4n\Gamma(n)}{Tn!}} \Gamma(n+0.5) \frac{1}{T^n} \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k (x-T)^k x^{n-k}}{\Gamma(k+0.5)\Gamma(n-k+0.5)}$ | $\frac{T}{2\sqrt{(T-x)x}}$ $\alpha=\beta=-0.5$ | $(0, T)$ |
| | $T_n(mx)$ | $\sqrt{\frac{4nm\Gamma(n)}{Tn!}} \Gamma(n+0.5) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k e^{-(0.5+k)mx} (1-e^{-mx})^{n-k}}{\Gamma(k+0.5)\Gamma(n-k+0.5)}$ | $\frac{e^{0.5mx}}{2\sqrt{1-e^{-mx}}}$ $\alpha=\beta=-0.5$ | $(0, \infty)$ |

| | | | | |
|---|--|--|---|---------------|
| 6 | Смещенные функции Чебышева I рода $\theta_n(x, T)$ | $\sqrt{\frac{2n\Gamma(n)}{n!}}\Gamma(n+0.5)\frac{1}{T^n}\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k C_n^k (T-x)^{-0.25+k} x^{-0.25+n-k}}{\Gamma(k+0.5)\Gamma(n-k+0.5)}$ | 1 $\alpha=\beta=-0.5$ | $(0, T)$ |
| | $\theta_n(mx)$ | $\sqrt{\frac{2nm\Gamma(n)}{n!}}\Gamma(n+0.5)\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k C_n^k e^{-(0.25+k)mx}(1-e^{-mx})^{n-k-0.25}}{\Gamma(k+0.5)\Gamma(n-k+0.5)}$ | 1 $\alpha=\beta=-0.5$ | $(0, \infty)$ |
| 7 | Смещенные полиномы Чебышева II рода $U_n(x, T)$ | $\sqrt{\frac{(n+1)\Gamma(n+2)}{Tn!}}\frac{\Gamma(n+1.5)}{T^n}\sum_{k=0}^n\frac{C_n^k (x-T)^k x^{n-k}}{\Gamma(k+1.5)\Gamma(n-k+1.5)}$ | $\frac{2}{T}\sqrt{(T-x)x}$ $\alpha=\beta=0.5$ | $(0, T)$ |
| | $U_n(mx)$ | $\sqrt{\frac{m(n+1)\Gamma(n+2)}{n!}}\Gamma(n+1.5)\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k C_n^k e^{-(0.5+k)mx}(1-e^{-mx})^{n-k}}{\Gamma(k+1.5)\Gamma(n-k+1.5)}$ | $2e^{-0.5mx}\sqrt{1-e^{-mx}}$ $\alpha=\beta=0.5$ | $(0, \infty)$ |
| 8 | Смещенные функции Чебышева II рода $u_n(x, T)$ | $\sqrt{\frac{2(n+1)\Gamma(n+2)}{n!}}\frac{\Gamma(n+1.5)}{T^{n+1}}\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k C_n^k (T-x)^{0.25+k} x^{0.25+n-k}}{\Gamma(k+1.5)\Gamma(n-k+1.5)}$ | 1 $\alpha=\beta=0.5$ | $(0, T)$ |
| | $u_n(mx)$ | $\sqrt{\frac{2m(n+1)\Gamma(n+2)}{n!}}\Gamma(n+1.5)\times$ $\times\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k C_n^k e^{-(0.75+k)mx}(1-e^{-mx})^{n-k+0.25}}{\Gamma(k+1.5)\Gamma(n-k+1.5)}$ | 1 $\alpha=\beta=0.5$ | $(0, \infty)$ |
| 9 | Смещенные полиномы (функции) Лежандра $P_n(x, T)$ | $\sqrt{\frac{(2n+1)}{T}}\frac{n!}{T^n}\sum_{k=0}^n\frac{C_n^k (x-T)^k x^{n-k}}{k!(n-k)!}$ | 1 $\alpha=\beta=0$ | $(0, T)$ |
| | $P_n(mx)$ | $\sqrt{(2n+1)m}\sum_{k=0}^n(-1)^k C_n^k e^{-(0.5+k)mx}(1-e^{-mx})^{n-k}$ | 1 $\alpha=\beta=0$ | $(0, \infty)$ |

| | | | | |
|----|---|--|--|---------------|
| 10 | Ортонормальные экспоненциальные функции $E_n(mx)$ | $\sqrt{2m(n+1)} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k e^{-(1+k)mx} (1 - e^{-mx})^{n-k}}{\Gamma(k+2)\Gamma(n-k+1)}$ | $\begin{matrix} 1 \\ \alpha=1, \beta=0 \end{matrix}$ | $(0, \infty)$ |
| 11 | Полиномы Сонина-Лагерра $L_n^\alpha(mx)$ | $\sqrt{\frac{m\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)(-mx)^k}{\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(n-k+1)\Gamma(k+1)}$ | $\begin{matrix} (mx)^\alpha e^{-mx} \\ \alpha > -1 \end{matrix}$ | $(0, \infty)$ |
| 12 | Функции Сонина-Лагерра $l_n^\alpha(mx)$ | $\sqrt{\frac{m^{\alpha+1}\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}} t^{0.5\alpha} e^{-0.5mx} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)(-mx)^k}{\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(n-k+1)\Gamma(k+1)}$ | $\begin{matrix} 1 \\ \alpha > -1 \end{matrix}$ | $(0, \infty)$ |
| 13 | Полиномы Лагерра $L_n(mx)$ | $\sqrt{m} \sum_{k=0}^n \frac{n!(-mx)^k}{(n-k)!k!k!}$ | $\begin{matrix} e^{-mx} \\ \alpha=0 \end{matrix}$ | $(0, \infty)$ |
| 14 | Функции Лагерра $l_n(mx)$ | $\sqrt{m} e^{-0.5mx} \sum_{k=0}^n \frac{n!(-mx)^k}{(n-k)!k!k!}$ | $\begin{matrix} 1 \\ \alpha=0 \end{matrix}$ | $(0, \infty)$ |

Приложение 2. Преобразования в пространстве коэффициентов разложения (фрагмент таблицы)

| N п/п | Наименование операции | Результирующая формула | Примечания |
|---|---|--|--|
| <p><i>Исходные сигналы</i> $x(t) = \sum_{n=0}^{N_1} A_n P_n; y(t) = \sum_{n=0}^{N_2} B_n P_n,$</p> <p>где A_n -коэффициенты разложения, P_n -ортонормированные полиномы Лежандра</p> $P_n = \frac{1}{T^n} \sqrt{\frac{2n+1}{T}} n! \sum_{k=0}^n \frac{n!}{((n-k)!k!)^2} (t-T)^k t^{n-k}$ | | | |
| 1 | Суммирование сигналов: $z(t) = x(t) + y(t)$ | $z(t) = \sum_{n=0}^{N_1} C_n P_n;$ | $C_n = A_n + B_n;$ $N_1 > N_2, B_n \equiv 0, \text{при}$ $n > N_2$ |
| 2 | Умножение сигналов $z(t) = x(t) * y(t)$ | $z(t) = \sum_{n=0}^{N_1+N_2} D_n P_n;$ | $D_n = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} C_{ijn} A_i B_j; \text{где}$ $C_{ijn} = \int_0^T P_i P_j P_n dt, \text{при}$ 1) n – четн., $\rightarrow (i + j)$ – четн. n – нечет., $\rightarrow (i + j)$ – нечет.; 2) $ i - j \leq n;$ 3) $ i + j \geq n.$ |
| 3 | Возведение в степень сигнала $z(t) = [x(t)]^m$ | $z(t) = \sum_{n=0}^N C_n P_n$ | $C_k = \int_0^T P_k \left(\sum_n A_n P_n \right)^m dt$ |
| 4 | Вычисление производной $z(t) = [x(t)]'$ | $z(t) = \sum_{n=0}^{N_1-1} C_n P_n$ | $C_n = \frac{2}{T} \sum_k \sqrt{(2k+1)(2n+1)} A_k$ $k = n+1, \dots,$ только нечетные при четном $n;$ $k = n+1, \dots,$ только четные при нечетном $n.$ |
| 5 | Вычисление интеграла $z(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$ | $z(t) = \sum_{n=0}^{N+1} C_n P_n$ | $C_0 = \frac{T}{2} \left[A_0 - \frac{A_1}{\sqrt{3}} \right];$ $C_k = \frac{T}{2\sqrt{2k+1}} \left[\frac{A_{k-1}}{\sqrt{2k-1}} - \frac{A_{k+1}}{\sqrt{2k+3}} \right], \text{при}$ $k \geq 1$ |

Приложение 3. Взвешенные ортогональные полиномы Якоби при $n = 0, 1, 2$ и различных значениях параметров α и β

Таблица 1.

$n=0$

| | | ЗНАЧЕНИЯ β ($\beta > -1$) | | | | | | | | |
|-------------------|---------------|-----------------------------------|------|---|-----|---|---|---|----|--|
| | | -0.95 | -0.5 | 0 | 0.5 | 1 | 2 | 8 | 10 | |
| ЗНАЧЕНИЯ α | $\alpha > -1$ | | | | | | | | | |
| | -0.95 | | | | | | | | | |
| | -0.5 | | | | | | | | | |
| | 0 | | | | | | | | | |
| | 0.5 | | | | | | | | | |
| | 1 | | | | | | | | | |
| | 2 | | | | | | | | | |
| | 8 | | | | | | | | | |
| | 10 | | | | | | | | | |

Таблица 2.

$n=1$

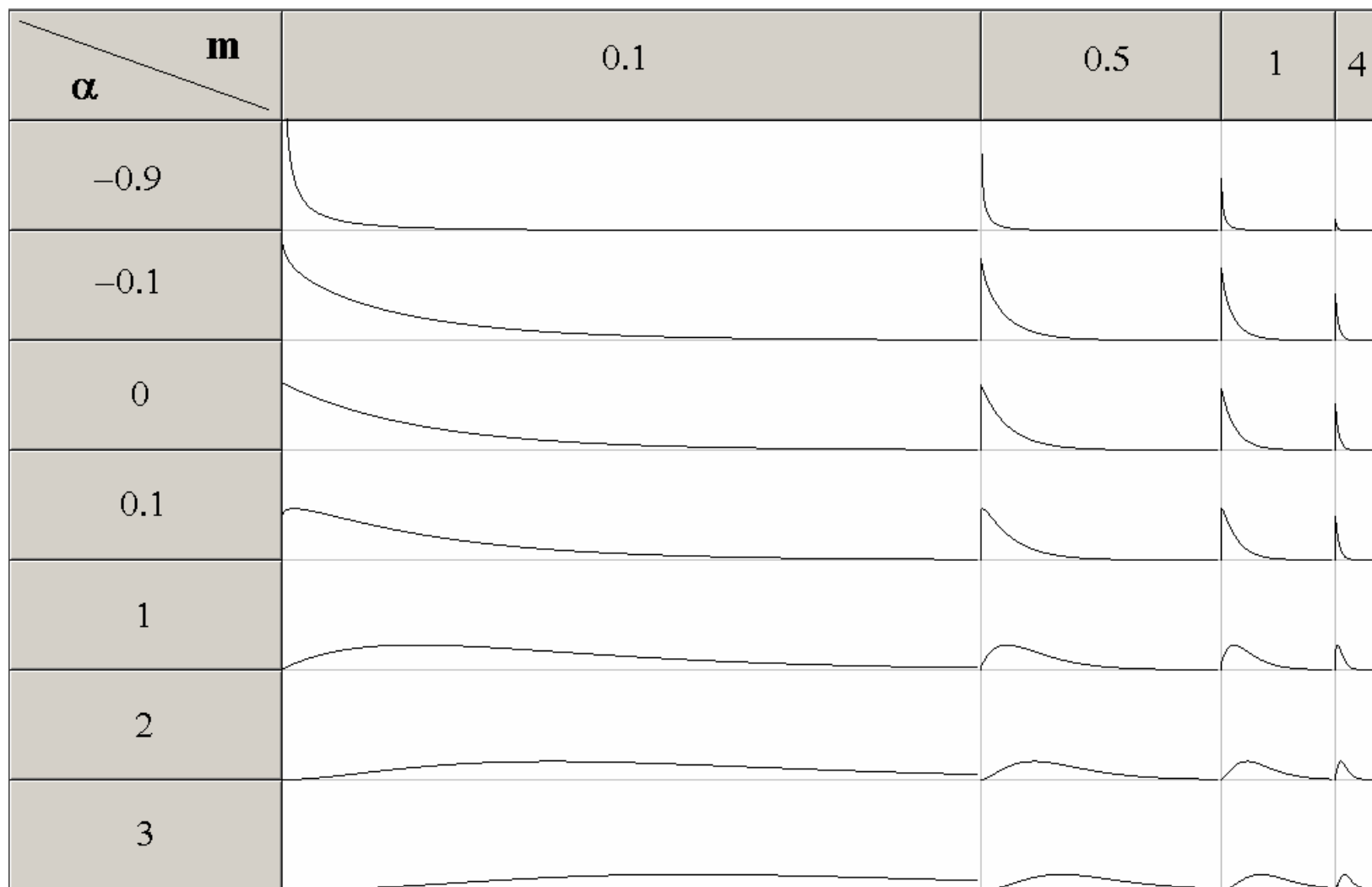
| | | ЗНАЧЕНИЯ β ($\beta > -1$) | | | | | | | | |
|--|--|-----------------------------------|------|---|-----|---|---|---|----|--|
| ЗНАЧЕНИЯ λ ($\lambda > -1$) | | -0.95 | -0.5 | 0 | 0.5 | 1 | 2 | 8 | 10 | |
| -0.95 | | | | | | | | | | |
| -0.5 | | | | | | | | | | |
| 0 | | | | | | | | | | |
| 0.5 | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |

Таблица 3.

$n=2$

| ЗНАЧЕНИЯ λ | ЗНАЧЕНИЯ β ($\beta > -1$) | | | | | | | | | |
|--------------------|-----------------------------------|------|---|-----|---|---|---|----|--|--|
| | -0.95 | -0.5 | 0 | 0.5 | 1 | 2 | 8 | 10 | | |
| $\lambda > -1$ | | | | | | | | | | |
| -0.95 | | | | | | | | | | |
| -0.5 | | | | | | | | | | |
| 0 | | | | | | | | | | |
| 0.5 | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |

Приложение 4. Изменение весовых функций Сонина-Лагерра при различных значениях параметра α и масштабного коэффициента m



Список литературы

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972.
2. Бернштейн С.Н. Собр. соч. Т.1. –М., 1952, с. 105. Т.2. – М., 1954, с. 310.
3. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. – М., 1954.
4. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1978.
5. Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной - М.: Наука, 1985
6. Nikiforov A.F., Suslov S.K., Uvarov V.B., Classical orthogonal polynomials of a discrete variable, Berlin - Heidelberg - New York: Springer Verlag, 1991
7. Dedus F.F., Dedus A.F., Ustinin M.N. A new data processing technology for pattern recognition and image analysis problems. Pattern Recognition and Image Analysis, vol.2, pp.195-207, 1992.
8. Dedus A.F., Dedus F.F., Makhortykh S.A., Ustinin M.N. Analytical description of multidimensional signals for solving problems of pattern recognition and image analysis. Pattern Recognition and Image Analysis, vol.3, pp.459-469, 1993.
9. Толстов Г.П. Ряды Фурье. – М., 1960.
10. Фарлоу С. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1985.
11. Чебышев П.Л. Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций. Полн. собр. соч.. Т. 2.– М.-Л., 1947, с. 151-235.
12. Паплаускас А.Б. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега. – М., 1966.
13. Дедус Ф.Ф. Автоматизация аналитического представления и обработки результатов экспериментальных исследований. //Материалы I Международной школы по автоматизации научных исследований. – Пущино, 1985, с.96-112.
14. Dedus F.F., Dedus A.F., Ustinin M.N. A new data processing technology for pattern recognition and image analysis problems. Pattern Recognition and Image Analysis, vol.2, pp.195-207, 1992.
15. Бесекерский В.А., Дедус Ф.Ф., Ройтберг М.А. Сжатие информации и идентификация на основе ортогональных разложений // Труды Ленинградского ИАП, 1977.
16. Гальченко А.А., Дедус Ф.Ф. Идентификация экспоненциальных сигналов методом взвешенных моментов. Автометрия. № 4, 1983.

17. Дедус Ф.Ф. Комбинированные цифро-аналитические методы обработки данных экспериментов //Материалы III Международной школы по автоматизации научных исследований. – Пущино, 1990, с. 52–77.
18. Джерри А.Дж. Теория отсчетов Шеннона, ее различные приложения и обобщения. Обзор. ТИИЭР, т.65, N 11, 1977, с.53 - 89.
19. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.2. – М.: Наука, 1975.
20. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М: Наука, 1968.
21. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике, М. Наука, 1984.
22. Сеге Г. Ортогональные многочлены. Физматгиз,1962.
23. Бейтмен Г., Эрдейи Э. Высшие трансцендентные функции. Том 2. – М: Наука, 1966.
24. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М: Наука, 1965.
25. Галлагер Р. Теория информации и надежность связи. – М., 1974.
26. Губер Р.С., Овчинский Б.В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. – М: ГИФМЛ, 1962.
27. Худсон Д. Статистика для физиков. – М: Мир, 1970.
28. Под редакцией М.Абрамовица и Н.Стигана. Справочник по специальным функциям. М, Наука, 1979.
29. Кропотов А.И. Николай Яковлевич Сонин, Л: Наука, 1967
30. Ф.Ф.Дедус, С.А.Махортых, М.Н.Устинин, А.Ф.Дедус. Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. Задачи анализа изображений и распознавания образов. М.: Машиностроение, 1999, 356 с.
31. А.Н.Панкратов О реализации алгебраических операций над рядами ортогональных функций // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2004, т.44, №12, с.2121-2127.
32. А.Фокс, М Пратт Вычислительная геометрия, М.:Мир, 1982.
33. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Физматгиз, 1962.