

Лекция Список основных вопросов по курсу.

- Постановка задачи оптимального быстродействия для линейной управляемой системы.
- Экспоненциал и его основные свойства. Формула Коши.
- Множество достижимости, множество управляемости. Их представление и основные свойства.
- Опорные функции и их связь с представлениями выпуклых множеств. Условие непустоты пересечения выпуклых множеств в терминах их опорных функций.
- Непрерывная зависимость опорной функции от ее аргументов. Хаусдорфово расстояние.
- Теорема об опорной функции интеграла. Свойства интеграла.
- Сопряжённая переменная; опорная функция множеств достижимости и управляемости на сопряжённой переменной; эквивалентная формулировка принципа максимума в терминах опорной функции множеств достижимости и управляемости.
- Принцип максимума Л.С.Понтрягина как необходимое условие оптимальности. Геометрическая интерпретация.
- Достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума с усиленными условиями трансверсальности.
- Понятие локальной управляемости и достаточные условия оптимальности.
- Локальная управляемость в начало координат. Лемма о внутренней точке интеграла. Достаточные условия локальной управляемости в начало координат. Достаточные условия оптимальности в начало координат.
- Теорема существования оптимального управления.
- Простейшие задачи синтеза.
- Управляемость. Теорема об управляемости (необходимые, достаточные условия).
- Линейная задача быстродействия с гладкой областью управления. Численные методы её решения.

Лекция Список вопросов к экзамену по курсу.

- Постановка задач математической теории оптимального управления и основные вопросы этой теории. Задача быстродействия.
- Задача оптимального быстродействия для линейных управляемых систем. Множества достижимости и управляемости.
- Экспоненциал: определение и основные свойства. Представление экспоненциала e^{tA} в виде конечной суммы.
- Формула Коши и представление множеств достижимости и управляемости для линейных управляемых систем. Операции над множествами в евклидовом пространстве (линейные преобразования суммы).
- Выпуклые множества. Наименьшая выпуклая оболочка множества; её существование и представление.
- Опорные функции ограниченных множеств. Определение и основные свойства опорной функции.
- Непрерывность опорной функции.
- Совпадение опорных функций данного множества и его наименьшей выпуклой оболочки.
- Восстановление наименьшей выпуклой оболочки компакта по его опорной функции. Связь между опорными функциями данного компакта и его компактного подмножества.
- Условия непустоты пересечения компактов в терминах их опорных функций.
- Расстояние Хаусдорфа между множествами и его выражение в терминах опорных функций.
- Интегральное преобразование класса допустимых управлений. Теорема об опорной функции интеграла (внесение знака опорной функции под знак интеграла).
- Формулировка трех теорем об интегралах в случае интегрирования линейного непрерывного преобразования класса допустимых управлений. Доказательство теоремы о непрерывной зависимости интеграла от верхнего предела.
- Множества достижимости и управляемости линейной управляемой системы. Их опорные функции. Непрерывная зависимость этих множеств от времени.
- Сопряжённое уравнение: представление его решения. Лемма о сопряжённой переменной и множествах достижимости и управляемости. Характер зависимости от времени опорной функции множества достижимости.
- Управляемость. Теорема об управляемости (необходимые, достаточные условия). Основная лемма (условие управляемости в случае $t_1 - t_0 = \min$ при выполнении предположений выпуклости).
- Принцип максимума Л.С.Понтрягина как необходимое условие оптимальности в линейной задаче быстродействия. Геометрическая интерпретация.
- Эквивалентная формулировка принципа максимума в терминах множеств достижимости и управляемости. Геометрическая интерпретация.
- Теорема о достаточных условиях оптимальности в форме принципа максимума с усиленными условиями трансверсальности.
- Понятие локальной управляемости. Достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума с условием локальной управляемости.
- Лемма о внутренней точке интеграла. Достаточные условия локальной управляемости для линейной задачи быстродействия в начало координат.
- Теорема существования оптимального управления.
- Понятие о задаче синтеза на примере объектов:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а. } \ddot{y} = v, \\ \text{б. } \ddot{y} + y = v, \\ \text{в. } \ddot{y} - y = v. \end{array} \right\} y, v \in E^1; \quad |v| \leq 1; \quad y(0) = a, \dot{y}(0) = b; \quad y(t_1) = 0, \dot{y}(t_1) = 0; \quad t_1 \rightarrow \min.$$

- Операции над множествами в евклидовом пространстве; линейные преобразования, суммы, объединения. Опорные функции преобразованных множеств.
- Численные методы решения линейной задачи быстродействия с гладкой областью управления. Метод продолжения по параметру, метод проектирования начального состояния на изохрону. Уточнение решения методом Ньютона.

Лекция 1

§ 1. Постановка математических задач оптимального управления

1.1. Управляемый объект и его динамика

Мы постоянно встречаемся с управляемыми объектами, к числу которых относятся, например, автомобиль, корабль, летательный аппарат, технологический процесс на производстве и т.п. У всех этих объектов есть органы управления ("рули"), изменением положения которых можно влиять на движение объекта. Возникает вопрос о том, как управлять объектом наилучшим образом (оптимально), как применять для этих целей математические методы.

Применение математических методов для исследования физических, технических, технологических и т.д. процессов становится возможным после того, как построена математическая модель изучаемого процесса. Математические модели реальных физических процессов могут описываться

- обыкновенными дифференциальными уравнениями,
- разностными уравнениями,
- дифференциальными уравнениями в частных производных,
- интегральными уравнениями,
- смешанным образом, например, обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных, и т.д.

Математическое моделирование реальных процессов является ответственным этапом исследования.

Мы будем рассматривать математические модели, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Такими моделями описывается достаточно широкий круг процессов, например, механическое движение летательных аппаратов и других технических объектов.

Предположим, что рассматриваемый объект в каждый момент времени t полностью описывается конечным набором чисел

$$x_1(t), \dots, x_n(t),$$

которые называются *фазовыми координатами* объекта. Из этих чисел образуем вектор

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x \in E^n,$$

размерности n , который будем называть *вектором фазовых координат* объекта. Пусть закон изменения фазовых координат во времени описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n; u), \quad i = 1, \dots, n,$$

где t – время, $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$ – производная по времени t , f_i – известные функции своих аргументов. Основой для составления таких систем дифференциальных уравнений служат законы конкретных областей знания (например, физические законы). Эту систему дифференциальных уравнений удобно записывать в векторной форме

$$\dot{x} = f(t, x, u). \quad (1)$$

Итак, динамика управляемого объекта описывается векторным дифференциальным уравнением (1), в правую часть которого входит параметр u , называемый управлением. Поучительно сравнить уравнение (1) с уравнением

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (2)$$

которое является предметом исследования теории обыкновенных дифференциальных уравнений; правая часть уравнения (2) не содержит аргумента u .

Ответим сейчас на вопрос о том, как пользоваться дифференциальным уравнением (1) для выделения и исследования конкретного движения управляемого объекта. Уравнение (1) описывает не конкретное движение управляемого объекта, а его технические возможности. Для описания конкретного движения управляемого объекта следует

- выбрать управление $u = u(t)$ как некоторую функцию времени t ;
- задать начальное условие

$$x(t_0) = x_0; \quad (3)$$

- решить задачу Коши

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)) \equiv F(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (4)$$

Решение $x(t)$ задачи Коши (4), зависящее от управления $u(t)$ и начального условия x_0 , описывает конкретное движение управляемого объекта.

1.2. Класс допустимых управлений

Управление $u = u(t)$ характеризует положение "рулей" управляемого объекта. Пусть $u = (u_1, \dots, u_r)$ – r -мерный вектор.

Если u_1 – вектор, равный отклонению руля от некоторого направления, то типично ограничение

$$u_1^- \leq u_1 \leq u_1^+,$$

где u_1^- , u_1^+ – заданные числа, причем важно подчеркнуть, что крайние значения u_1^- , u_1^+ допустимы (неравенства нестрогие).

Если, например, u_2 – сила тяги, то типично ограничение

$$0 \leq u_2 \leq u_2^+,$$

где u_2^+ – максимально возможная сила тяги, причем и здесь крайние значения 0 , u_2^+ также допустимы.

Обобщая эту ситуацию, будем считать, что вектор управления в каждый момент времени t удовлетворяет условию

$$u \in U,$$

где U – некоторое замкнутое ограниченное множество в r -мерном пространстве E^r . Множество U называется *областью управления*.

Опишем теперь *класс допустимых управлений* \mathcal{U} : класс \mathcal{U} состоит из вектор-функций $u(t)$, значения которых

$$u(t) \in U \quad \forall t,$$

в описание класса допустимых управлений входит также структурное ограничение на управление $u(t)$, т.е. указание характера зависимости допустимых управлений $u(t)$ от времени t . Например, допустимые управления $u(t)$ могут быть

- кусочно-непрерывными функциями времени t ,
- кусочно-постоянными функциями времени t ,
- измеримыми функциями времени t ,
- гладкими функциями времени t .

Таким образом, можно кратко описать определение класса \mathcal{U} допустимых управлений следующим образом:

$$\mathcal{U} = \left\{ u(t) \left| \begin{array}{l} 1) u(t) \in U \quad \forall t, \\ 2) u(t) \text{ удовлетворяет заданному структурному ограничению} \\ \text{на характер зависимости от времени } t \end{array} \right. \right\}.$$

Выбор структурного ограничения определяется с одной стороны техническими, а с другой стороны математическими соображениями. Для приложений весьма важен класс кусочно-непрерывных управлений; для решения вопросов теоретического обоснования привлекается более обширный класс измеримых управлений.

Чтобы подчеркнуть зависимость класса \mathcal{U} допустимых управлений от области управления U $\mathcal{U} = \mathcal{U}_U$, будем писать

Определение 1.1. Управление $u(t)$ называется *кусочно-непрерывным* на отрезке $[t_0, t_1]$, если функция $u(t)$ непрерывна на отрезке $[t_0, t_1]$ всюду, кроме, быть может, конечного числа точек $\tau_1, \dots, \tau_N \in (t_0, t_1)$, которые являются точками разрыва первого рода (точками разрыва с конечными скачками); кроме того, на концах отрезка $[t_0, t_1]$ выполняются равенства

$$u(t_0 + 0) = u(t_0), \quad u(t_1 - 0) = u(t_1).$$

1.3. Множества начальных и конечных состояний управляемого объекта

Мы уже говорили ([п.1.1](#)) о том, что для выделения конкретного движения управляемого объекта нужно выбрать управление $u = u(t)$ и задать начальное условие $x(t_0) = x_0$, а затем решить [задачу Коши \(4\)](#). Начальный момент времени t_0 считается

заданным, управление $u(t)$ выбирается из класса допустимых управлений, описанного в п. 1.2; вектор x_0 (начальное состояние управляемого объекта) может быть однозначно заданным или принадлежать некоторому множеству M_0 , лежащему в фазовом пространстве E^n . Таким образом, должно быть выполнено условие

$$x(t_0) \in M_0, \quad (5)$$

в котором множество M_0 называется *множеством начальных состояний* управляемого объекта. Это множество может состоять из одной точки x_0 , но может быть и более обширным (содержать более одной точки).

Предположим, что целью управления движением рассматриваемого объекта является перевод объекта из начального состояния (5) в конечное состояние

$$x(t_1) \in M_1, \quad (6)$$

где M_1 – некоторое множество, лежащее в фазовом пространстве E^n . Множество M_1 называется *множеством конечных состояний* объекта. Момент времени t_1 (конечный момент процесса управления, $t_1 > t_0$) может быть заранее заданным или же определяться в процессе решения задачи (это должно быть четко оговорено в постановке задачи). Итак, мы хотим перевести объект из множества M_0 во множество M_1 (рис.1.1).

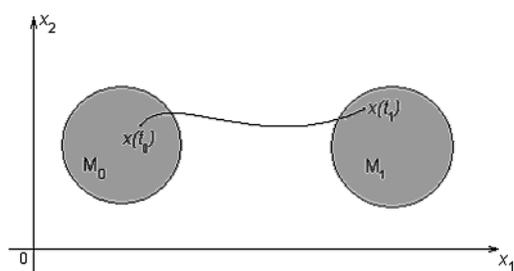


Рисунок 1.1.

Например, в задаче о переводе с одной орбиты на другую множества M_0 и M_1 состоят более, чем из одной точки.

Типична ситуация, когда перевод объекта из M_0 в M_1 может быть выполнен неединственным способом, при помощи различных допустимых управлений. В этом случае появляется возможность для оптимизации управляемого процесса, т.е. можно решать задачу о переводе объекта из M_0 в M_1 "наилучшим способом". Обсудим сейчас вопрос о том, какой смысл следует приписать последнему выражению.

1.4. Критерий качества управления

Рассмотрим пару

$$(x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (7)$$

где $u(t)$ – допустимое управление, $x(t)$ – отвечающая этому управлению траектория с начальным условием $x(t_0) = x_0 \in M_0$, т.е. $x(t)$ – решение задачи Коши (4), причем выполняется условие $x(t_1) \in M_1$.

Рассмотрим также функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t)) dt, \quad (8)$$

где $f^0(t, x, u)$ – известная функция своих аргументов. Таким образом, каждой паре (7) ставится в соответствие число J , определяемое по формуле (8). Функционал (8) называется *критерием качества управления*. Он может иметь физический смысл (в зависимости от функции f^0) а) расхода топлива, б) энергетических затрат, в) времени перехода из M_0 в M_1 , и т.д. Конкретный выбор функционала J в приложениях производится инженером, исходя из требований, предъявляемых к рассматриваемому управляемому объекту. В случае $f^0 = 1$ получаем

$$J = t_1 - t_0 \quad (9)$$

(функционал имеет физический смысл времени перехода объекта из M_0 в M_1).

Нашей целью является минимизация функционала (8), характеризующего качество процесса управления.

Мы описали выше основные элементы, типичные для математической задачи оптимального управления, и переходим сейчас к ее постановке.

1.5. Постановка задачи оптимального управления

Требуется: перевести объект из множества начальных состояний M_0 , см. (5), на множество конечных состояний M_1 , см. (6), за счет выбора допустимого управления $u = u(t)$ из класса допустимых управлений \mathcal{U} , так, чтобы функционал J , см. (8), принимал минимальное значение, или в компактной форме

$$J \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}.$$

Управление $u(t)$, решающее поставленную задачу, называется *оптимальным управлением* (в смысле функционала J). В случае (9) задача оптимального управления называется *задачей быстродействия*.

Таким образом, постановка *задачи оптимального управления* в краткой форме имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x, u); \\ u(t) \in \mathcal{U}, \\ x(t_0) \in M_0, \\ x(t_1) \in M_1, \\ J \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}. \end{cases} \quad (10)$$

Задача (10) требует задания следующего набора исходных данных:

$$\{f^0, f; \mathcal{U} = \mathcal{U}_U; M_0, M_1, t_0\} \quad (11)$$

Напомним еще раз, что момент времени t_1 окончания процесса управления

а) может быть заранее заданным (и в этом случае число t_1 следует отнести к набору элементов (11))

б) может быть незадаанным (так обстоит дело, например, в задаче быстродействия, где t_1 заранее неизвестен), и в этом случае нахождение t_1 следует отнести к задаче нахождения оптимального управления $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

1.6. Основные математические вопросы теории оптимального управления

Перечислим основные вопросы теории оптимального управления:

1. Управляемость (возможность перевода объекта из M_0 в M_1 при помощи некоторого допустимого управления; без управляемости решения задачи (10) не существует). Исследование управляемости не связано с критерием качества.
2. Существование оптимального управления (пусть объект обладает свойством управляемости; существует ли оптимальное управление в выбранном классе допустимых управлений \mathcal{U} ?).
3. Необходимые условия оптимальности (теоремы о необходимых условиях оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина). Роль необходимых условий невозможно переоценить; необходимые условия позволяют, вообще говоря, выделить отдельные траектории, которые могут быть оптимальными, отбраковать заведомо неоптимальные решения. Роль необходимых условий оптимальности можно сравнить с ролью условия $f'(x) = 0$ в задаче на минимум функции $f(x)$ и с ролью уравнений Эйлера-Лагранжа в классическом вариационном исчислении.
4. Достаточные условия оптимальности.
5. Единственность оптимального управления.
6. Численные методы построения оптимальных решений.

В настоящем курсе излагается линейная теория быстродействия.

1.7. Линейная задача быстродействия

Линейная задача быстродействия является частным случаем задачи оптимального управления (10) при условии (9) и в предположении линейности функции f :

$$\dot{x} = Ax + u \quad (12)$$

$$x(t_0) \in M_0, \quad x(t_1) \in M_1, \quad (13)$$

$$J = t_1 - t_0 \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_U}. \quad (14)$$

Здесь $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор фазовых координат; $x \in E^n$,

$A = (a_{ij})$ – матрица системы (считаем её не зависящей от времени t),

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ – вектор управления; $u \in E^n$.

Класс допустимых управлений

$$Y = Y_U = \left\{ u(t) \left| \begin{array}{l} 1) \text{ принимает значения из компакта } U \\ 2) \text{ задан характер зависимости } u(t) \text{ от } t \end{array} \right. \right\}.$$

Компакт U называется *областью управления*.

M_0 – множество начальных состояний объекта,

M_1 – множество конечных состояний объекта,

$J = t_1 - t_0$ – критерий качества управления (время перехода из M_0 в M_1).

Линейная задача быстрогодействия (12)-(14) задается набором исходных данных

$$(A, M_0, M_1, Y = Y_U, t_0) \quad (15)$$

и состоит в нахождении допустимого управления $u = u(t)$, переводящего объект из M_0 в M_1 по траекториям уравнения (12) за минимальное время. Управление $u(t)$, решающее эту задачу, называется *оптимальным по быстродействию*, а соответствующая этому управлению траектория $x(t)$ называется *оптимальной по быстродействию траекторией*. Решить задачу быстрогодействия (12)-(14) означает, что нужно по набору исходных данных (15) найти оптимальную пару $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

Векторное дифференциальное уравнение (12) равносильно системе

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + u_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

1.8. Два простейших примера

Пример 1.1. Управляемое движение материальной точки по прямой под действием ограниченной внешней силы.

Рассмотрим материальную точку массы m , которая движется по прямой (ось y) (рис.1.2), без трения под действием ограниченной внешней силы, направленной вдоль оси y .



Рисунок 1.2.

Геометрическое положение материальной точки описывается координатой $y = y(t)$. На основании второго закона Ньютона запишем дифференциальное уравнение движения точки

$$m \ddot{y} = f(t),$$

т.е.

$$\ddot{y} = v(t), \quad (16)$$

где $v(t) = \frac{f(t)}{m}$ – управление. Считаем заданными начальные условия $y(0) = a$ (начальное положение точки), $\dot{y}(0) = b$ (начальная скорость точки). Дальнейшее движение точки зависит от выбора управления $v(t)$, которое при $m = 1$ совпадает с $f(t)$. Пусть управление $v(t)$ подчинено ограничению

$$|v(t)| \leq 1.$$

Рассмотрим задачу о переводе точки из начального положения a при начальной скорости b в положение $y = 0$ с нулевой скоростью. Этот перевод осуществляется за счет выбора управления $v(t)$. Требуется выполнить этот перевод за кратчайшее время.

Полагая $y = x_1, \dot{y} = x_2, v = u_2$, перейдем от дифференциального уравнения (16) второго порядка к следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u_2.\end{aligned}$$

В данном примере размерность фазового пространства равна 2, фазовым пространством служит фазовая плоскость x_1, x_2 . Множество начальных состояний $M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\}$ состоит из одной точки $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, множество конечных состояний $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ – начало координат, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – фазовый вектор, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, область управления $U = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : u_1 = 0, |u_2| \leq 1 \right\}$ – отрезок. Таким образом, мы получили линейную задачу быстродействия в стандартной форме (12)-(14).

Пример 1.2. Управляемое движение математического маятника под действием ограниченной внешней силы.

Рассмотрим движение тяжёлого шарика массы m под воздействием упругой силы пружины и внешней силы $f(t)$ (рис.1.3).

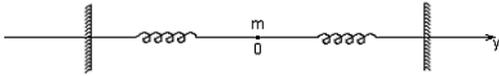


Рисунок 1.3.

Движение шарика происходит вдоль оси y . В состоянии равновесия шарик имеет координату $y = 0$. Привлекая физические законы – второй закон Ньютона и закон Гука (упругая сила пропорциональна отклонению от положения равновесия и направлена в сторону положения равновесия), запишем дифференциальное уравнение движения

$$m \ddot{y} = -ky + f(t),$$

где положительный коэффициент k характеризует жёсткость пружины. Полагая $\omega^2 = \frac{k}{m}$, $v(t) = \frac{f(t)}{m}$, приходим к уравнению

$$\ddot{y} + \omega^2 y = v(t). \quad (17)$$

(Здесь мы для упрощения считаем $\omega^2 = 1, |v(t)| \leq 1$). Пусть заданы начальные условия $y(0) = a, \dot{y}(0) = b$. Рассмотрим задачу о скорейшем успокоении маятника под действием ограниченной внешней силы $v(t)$.

Полагая $y = x_1, \dot{y} = x_2, v = u_2$, от уравнения (17) переходим к системе

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u_2.\end{aligned}$$

Как и в предыдущем примере, здесь $n = 2$, $M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\}$, $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : u_1 = 0, |u_2| \leq 1 \right\}$.

Мы опять пришли к постановке линейной задачи быстродействия в стандартной форме.

Решение этих примеров описывается в §§13, 16.

Лекция 2

§ 2. Некоторые сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений

При изучении линейной теории оптимального управления важную роль играет формула Коши для решения линейной системы. В §2 приводится обоснование формулы Коши для линейных систем с постоянными коэффициентами, изучается экспоненциал матрицы, рассмотрены примеры.

2.1. Формула Коши для решения начальной задачи в случае линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

2.1.1. Скалярный случай ($n=1$). Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = ax + u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где $x = x(t)$ – неизвестная скалярная функция аргумента t , $u(t)$ – известная непрерывная функция, a – заданное число, x_0 – заданное начальное условие, t – независимая переменная (время), t_0 – начальный момент времени.

Решение задачи Коши (1) определяется следующей формулой:

$$x(t) = e^{(t-t_0)a} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)a} u(s) ds \right), \quad (2)$$

В этом можно убедиться непосредственной проверкой. Действительно, функция (2) удовлетворяет начальному условию $x(t_0) = x_0$ и является решением дифференциального уравнения, так как

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a e^{(t-t_0)a} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)a} u(s) ds \right) + e^{-(t-t_0)a} u(t) = \\ &= ax(t) + u(t). \end{aligned}$$

Формула (2) называется *формулой Коши*.

Замечание 2.1. Если $u(t)$ – кусочно-непрерывная функция со скачками в точках τ_1, \dots, τ_s , то формулой (2) определяется непрерывная кусочно-дифференцируемая функция $x(t)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{x}(t) = ax(t) + u(t)$ $\forall t \neq \tau_1, \dots, \tau_s$; производная $\dot{x}(t)$ в точках τ_1, \dots, τ_s имеет конечные скачки (рис.2.1).

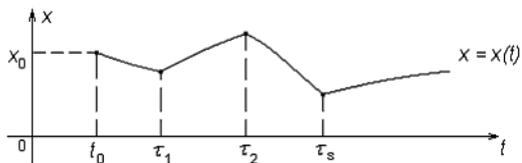
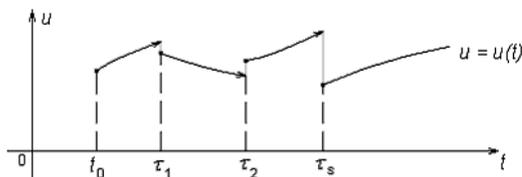


Рисунок 2.1.

2.1.2. Общий случай ($n > 1$). Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = Ax + u(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (3)$$

$$\text{Здесь } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix};$$

$x = x(t)$ – неизвестная векторная функция, $u(t)$ – заданная непрерывная векторная функция, A – постоянная квадратная матрица,

x_0 – вектор начальных условий. Решение $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ задачи Коши (3) определяется формулой

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)A} u(s) ds \right), \quad (4)$$

или

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} u(s) ds. \quad (5)$$

Формулы (4),(5) называются *формулами Коши*. В однородном случае ($u(t) = 0$) решение задачи Коши $\dot{x} = Ax, x(t_0) = x_0$ определяется формулой

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0. \quad (6)$$

В формулах (4)-(6) участвует матричная функция $e^{(t-t_0)A}$, называемая экспоненциалом матрицы A . В [п.2](#) вводится понятие экспоненциала, изучаются его основные свойства. После этого нетрудно обосновать формулу Коши.

2.2. Экспоненциал постоянной квадратной матрицы. Его основные свойства. Обоснование формулы Коши

Рассмотрим квадратную матрицу n -ого порядка

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}; \quad D = ((D)_{ij})_{i,j=1}^n, \quad (D)_{ij} = d_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Напомним известную из математического анализа формулу

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}.$$

Этот степенной ряд сходится при всех t .

Определим теперь экспоненциал матрицы D , положив

$$e^D = E + \frac{1}{1!} D + \frac{1}{2!} D^2 + \dots + \frac{1}{n!} D^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k. \quad (7)$$

Здесь $0! = 1$, $D^0 = E$ – единичная матрица n -го порядка.

Таким образом, экспоненциал определен как сумма матричного ряда (7), члены которого являются квадратными матрицами порядка n .

Экспоненциал e^D – квадратная матрица порядка n . Сходимость матричного ряда (7) понимается в смысле поэлементной сходимости, т.е.

$$(e^D)_{ij} = (E)_{ij} + \frac{1}{1!} (D)_{ij} + \frac{1}{2!} (D^2)_{ij} + \dots + \frac{1}{k!} (D^k)_{ij} + \dots \quad (8)$$

В случае $D = tA$, где t – скалярный множитель (в приложениях t – время), A – $(n \times n)$ -матрица, получаем

$$e^{tA} = E + \frac{t}{1!} A + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} A^k + \dots \quad (9)$$

Теорема 2.1. (об основных свойствах экспоненциала)

1. Для любой $(n \times n)$ -матрицы D существует экспоненциал e^D (сходится матричный ряд (7), т.е. сходятся n^2 числовых рядов (8)).

2. Если A, B – две перестановочные ($AB = BA$) $(n \times n)$ -матрицы, то

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B}.$$

3. Пусть $D = tA$; матричная функция e^{tA} непрерывно дифференцируема, причем

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

Доказательство

1) Докажем сходимость числовых рядов (8) для любой матрицы D . Для этого оценим общий член рядов (8). Пусть

$$|(D)_{ij}| \leq d, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$|(D^2)_{ij}| = \left| \sum_{k=1}^n (D)_{ik} (D)_{kj} \right| \leq nd^2,$$

$$|(D^3)_{ij}| \leq n^2 d^3,$$

...

$$|(D^k)_{ij}| \leq n^{k-1} d^k,$$

...

Отсюда получаем оценку общего члена ряда (8):

$$\left| \frac{1}{k!} (D^k)_{ij} \right| \leq \frac{1}{n} \frac{(nd)^k}{k!}. \quad (10)$$

Теорема сравнения для числовых рядов, сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(nd)^k}{k!} = \frac{e^{nd} - 1}{n}$$

и неравенство (10) позволяют сделать заключение о сходимости всех n^2 рядов (8), причем эти ряды сходятся абсолютно. Итак, экспоненциал e^D определен для любой матрицы D .

2) Пусть $AB = BA$. Тогда

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2,$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3,$$

.....

$$(A+B)^m = A^m + mA^{m-1}B + \dots + B^m = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} A^k B^{m-k} = \sum_{k+i=m, k, i \geq 0} \frac{m!}{k!i!} A^k B^i, \quad (11)$$

т.е. для перестановочных матриц A, B имеет место формула бинорма Ньютона, $\frac{m!}{k!(m-k)!}$ – биномиальные коэффициенты. Привлекая (7), (11), получаем:

$$\begin{aligned} e^A \cdot e^B &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} B^i \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k!i!} A^k B^i = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{\substack{k+i=m \\ k, i \geq 0}} \frac{m!}{k!i!} A^k B^i \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (A+B)^m \stackrel{(7)}{=} e^{A+B}. \end{aligned}$$

Упражнение 2.1. Привести примеры матриц A, B для которых $e^A \cdot e^B \neq e^{A+B}$.

3) Невырожденность экспоненциала и формула для его обращения вытекают из части 2) рассматриваемой теоремы. Действительно, в силу перестановочности D и $(-D)$ получаем:

$$e^D \cdot e^{-D} = e^{D-D} = e^0 = E, \quad e^D \cdot e^{-D} = E.$$

4) Докажем, что матричная функция e^{tA} непрерывно дифференцируема по аргументу t , т.е. каждый её элемент $(e^{tA})_{ij}$ – непрерывно дифференцируемая функция аргумента t . Так как

$$(e^{tA})_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A^k)_{ij} \quad (12)$$

– сумма степенного ряда относительно аргумента t (радиус сходимости этого ряда равен ∞), и степенные ряды можно дифференцировать сколько угодно раз, причем при дифференцируемости радиус сходимости не изменяется, то функции (12) аналитические. Следовательно, существует производная $\frac{d}{dt}(e^{tA})$, причем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{tA}) &= \frac{d}{dt} \left(E + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} A^k + \dots \right) = \\ &= A + tA^2 + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k + \dots = A \left(E + tA + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} + \dots \right) = Ae^{tA} = e^{tA} A. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}, \quad e^{tA}|_{t=0} = E. \quad (13)$$

Это свойство экспоненциала позволяет проверить справедливость формулы Коши при $n > 1$ (подобно тому, как это было сделано выше при $n = 1$). Действительно, для векторной функции $x(t)$, определяемой формулой (4), выполняется начальное условие $x(t_0) = x_0$ и, кроме того,

$$\dot{x}(t) = Ae^{(t-t_0)A} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)A} u(s) ds \right) + e^{(t-t_0)A} e^{-(t-t_0)A} u(t) = Ax(t) + u(t),$$

т.е. функция (4) является решением задачи Коши (3).

Итак, доказана

Теорема 2.2.

Решение [задачи Коши \(3\)](#) существует и определяется формулой Коши [\(4\)](#) или [\(5\)](#). Кроме того, решение задачи Коши (3) единственно.

Упражнение 2.2. Доказать единственность решения задачи Коши (3).

Упражнение 2.3. Проверить, что

$$(e^{tA})^* = e^{t(A^*)}, \quad e^{tA} \cdot e^{sA} = e^{(t+s)A},$$

где $t, s \in \mathbb{R}^1$, * – знак транспонирования.

Замечание 2.2. Если непрерывная функция $u(t)$ определена на интервале (a, b) , содержащем точку t_0 , то решение задачи [\(1\)](#) определено на всем интервале (a, b) и описывается на этом интервале формулой Коши [\(4\)](#). Таким образом, формула Коши [\(4\)](#) применима как при $t > t_0$, так и при $t < t_0$.

Пример 2.1. Найти решение задачи Коши

$$\dot{x} = x + 1, \quad x(0) = 1.$$

Здесь $n = 1$, $\alpha = 1$, $t_0 = 0$, $x_0 = 1$, $u(t) = 1$. Применение формулы (2) дает:

$$x(t) = e^t \left(1 + \int_0^t e^{-s} 1 ds \right) = e^t \left(1 + \frac{e^{-s}}{-1} \Big|_{s=0}^{s=t} \right) = e^t (1 - e^{-t} + 1) = 2e^t - 1.$$

Формулу Коши [\(4\)](#), [\(5\)](#) целесообразно запомнить, так как исследование линейной задачи быстрого действия основано в значительной степени на применении формулы Коши.

2.3. Примеры вычисления экспоненциала для конкретных матриц

Пример 2.2. Найти экспоненциал e^{tA} матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Прямое вычисление дает $A^2 = 0$; следовательно, $A^k = 0$ при $k \geq 2$, и ряд (7) содержит лишь 2 члена:

$$e^{tA} = E + tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Итак, } e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{-tA} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{-tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.3. Найти экспоненциал e^{tA} матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Находим

$$\begin{aligned} A^2 &= -E, & A^6 &= -E, \\ A^3 &= -A, & A^7 &= -A, \\ A^4 &= E, & A^8 &= E, \\ A^5 &= A, & A^9 &= A, \dots \end{aligned}$$

Применение формулы (7) дает:

$$e^{tA} = E + tA + \frac{t^2}{2!}(-E) + \frac{t^3}{3!}(-A) + \frac{t^4}{4!}E + \frac{t^5}{5!}A + \frac{t^6}{6!}(-E) + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right)E + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right)A =$$

$$= \cos(t)E + \sin(t)A. \quad (14)$$

Таким образом,

$$e^{tA} = \cos(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

$$e^{-tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, \quad e^{-tA} = e^{tA}.$$

В примерах 2.2, 2.3 экспоненциал e^{tA} получен вычислением ряда (7). Рассмотрим теперь другой прием нахождения экспоненциала на основе его свойства (13).

Пример 2.4. Найти экспоненциал e^{tA} матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Покажем, что

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Для доказательства формулы (15) достаточно проверить, что матрица, стоящая в правой части (15), удовлетворяет условиям (13). Эта матрица при $t=0$ превращается в единичную матрицу, далее

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} \\ 0 & -e^{-t} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} \\ 0 & -e^{-t} \end{pmatrix},$$

и формула (15) доказана. Недостатком этого способа является то, что не указан способ получения самой формулы (15).

2) Рассмотрим метод получения (15) на основе свойства (13).

Запишем экспоненциал в форме

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} y_1(t) & z_1(t) \\ y_2(t) & z_2(t) \end{pmatrix} = (y(t) | z(t)).$$

Его первый столбец находим, решая задачу Коши

$$\dot{y} = Ay, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

причём вектором начальных условий служит первый столбец единичной матрицы. Последняя система в координатной форме имеет вид:

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -y_2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

$$\text{Решая её, получаем: } y_1(t) = 1, \quad y_2(t) = 0; \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения второго столбца $z(t)$ экспоненциала решаем задачу Коши

$$\dot{z} = Az, \quad z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$z_1(t) = 1 - e^{-t}, \quad z_2(t) = e^{-t}; \quad z(t) = \begin{pmatrix} 1 - e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы пришли к формуле (15).

Обратим внимание на то, что экспоненциал (15) может быть записан в форме

$$e^{tA} = p_0(t)E + p_1(t)A, \quad (16)$$

где $p_0(t) = 1, p_1(t) = 1 - e^{-t}$. Аналогичное представление было получено для экспоненциала из [примера 2.3, см. \(14\)](#), где $p_0(t) = \cos(t)$, $p_1(t) = \sin(t)$.

Это наблюдение позволяет применить для нахождения экспоненциала следующий метод.

3) Ищем экспоненциал в форме (16), где функции $p_0(t), p_1(t)$ подлежат определению. Полагая в (16) $t = 0$, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0(0) & p_1(0) \\ 0 & p_0(0) - p_1(0) \end{pmatrix},$$

откуда следует, что функции $p_0(t), p_1(t)$ должны удовлетворять начальным условиям

$$p_0(0) = 1, \quad p_1(0) = 0. \quad (17)$$

Дифференцируя (16) по t , получаем

$$Ae^{tA} = \dot{p}_0(t)E + \dot{p}_1(t)A; \quad (18)$$

Подстановка (16) в (18) дает

$$p_0(t)A + p_1(t)A^2 = \dot{p}_0(t)E + \dot{p}_1(t)A,$$

откуда, принимая во внимание равенство $A^2 = -A$, находим

$$\dot{p}_0(t)E + (\dot{p}_1(t) + p_1(t) - p_0(t))A = 0,$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_0(t) & \dot{p}_1(t) + p_1(t) - p_0(t) \\ 0 & -\dot{p}_1(t) - p_1(t) + p_0(t) + \dot{p}_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

или

$$\dot{p}_0(t) = 0, \quad \dot{p}_1(t) + p_1(t) - p_0(t) = 0, \quad -\dot{p}_1(t) - p_1(t) + p_0(t) + \dot{p}_0(t) = 0.$$

Из условий $\dot{p}_0(t) = 0$, $p_0(0) = 1$ следует $p_0(t) = 1$. Далее из условий $\dot{p}_1(t) + p_1(t) - p_0(t) = 0$, $p_1(0) = 0$, $p_0(t) = 1$ следует, что $p_1(t) = 1 - e^{-t}$.

Таким образом, в примере 2.4

$$e^{tA} = p_0(t)E + p_1(t)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - e^{-t}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Выбор представления экспоненциала (16), на котором основан последний метод, объясняет приведенная в п.2.4 [теорема 2.3](#).

Пример 2.5. Найти экспоненциал e^{tA} матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение

$$e^{tA} = \operatorname{ch}(t)E + \operatorname{sh}(t)A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t) & \operatorname{sh}(t) \\ \operatorname{sh}(t) & \operatorname{ch}(t) \end{pmatrix}.$$

Пример 2.6. Найти e^{tA} , где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$A^k = 0, \quad k \geq 3,$$

$$e^{tA} = E + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.7. Найти e^{tA} , для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение

$A^2 = A^4 = \dots = A^{2k} = E$; $A^3 = A^5 = \dots = A^{2k+1} = A$, $k = 1, 2, \dots$, и по формуле (7) получаем

$$e^{tA} = \operatorname{ch}(t)E + \operatorname{sh}(t)A = \operatorname{ch}(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \operatorname{sh}(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t) & 0 & \operatorname{sh}(t) \\ 0 & e^t & 0 \\ \operatorname{sh}(t) & 0 & \operatorname{ch}(t) \end{pmatrix}.$$

Пример 2.8. Найти e^{tA} , где $(n \times n)$ -матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение

Так как $A^n = 0$, то по формуле (7) получаем:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ & & & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.9. Найти экспоненциал e^{tA} , где $(n \times n)$ -матрица

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}. \quad (\text{Жорданова клетка})$$

Пример 2.10. Пусть матрица J имеет клеточно-диагональную структуру

$$J = \operatorname{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s),$$

где

$$J_m = \begin{pmatrix} \lambda_m & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_m & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_m & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}, \quad m = 1, \dots, s,$$

матрица размерности $k_m \times k_m$ (жорданова клетка); $k_1 + \dots + k_s = n$.

Показать, что $(n \times n)$ -матрица J имеет экспоненциал клеточно-диагональной структуры

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{t\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Пример 2.11. Найти e^{tA} , если $A = T^{-1}JT$, где T – невырожденная $(n \times n)$ -матрица, J – матрица из примера 2.10. Показать, что $e^{tA} = T^{-1}e^{tJ}T$.

2.4. Теорема о представлении экспоненциала в виде конечной суммы

Теорема 2.3.

Пусть A – квадратная матрица n -ого порядка, t – скалярная переменная. Тогда

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} p_j(t) A^j, \quad (19)$$

где $p_j(t)$ – скалярные непрерывные (и даже аналитические) функции аргумента t .

Доказательство

теоремы 2.3 основано на представлении экспоненциала e^{tA} в форме ряда (7) и теореме Гамильтона-Кэли, состоящей в том, что матрица аннулирует свой характеристический многочлен.

Запишем формулу (7) в виде

$$e^{tA} = E + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} + \frac{t^n}{n!} A^n + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} A^{n+1} + \dots \quad (20)$$

Пусть

$$H_A(\lambda) \equiv \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n (\lambda^n - k_{n-1} \lambda^{n-1} - \dots - k_1 \lambda - k_0) \quad (21)$$

– характеристический многочлен матрицы A . Утверждение теоремы Гамильтона-Кэли можно записать в форме

$$H_A(\lambda)|_{\lambda=A} = O, \quad (22)$$

где $O = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ – нулевая матрица размерности $(n \times n)$.

Из (21), (22) следует, что

$$A^n = q_0^{(n)} E + q_1^{(n)} A + \dots + q_{n-1}^{(n)} A^{n-1}, \quad (23)$$

где $q_j^{(n)} = k_j$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, – коэффициенты характеристического многочлена (21). Формула (23) показывает, что n -ая степень A^n матрицы A линейно выражается через меньшие степени $A^0, A^1, A^2, \dots, A^{n-1}$ матрицы A , причем коэффициенты $q_j^{(n)}$ в (23) определяются матрицей A .

Покажем, что любая степень A^k , $k > n$ матрицы A также линейно выражается через $A^0, A^1, A^2, \dots, A^{n-1}$ с некоторыми коэффициентами, зависящими от номера k (и от матрицы A). Действительно, умножив равенство (23) на матрицу A , получаем:

$$A^{n+1} = q_0^{(n)} A + q_1^{(n)} A^2 + \dots + q_{n-2}^{(n)} A^{n-1} + q_{n-1}^{(n)} [q_0^{(n)} E + q_1^{(n)} A + \dots + q_{n-1}^{(n)} A^{n-1}] =$$

$$= q_0^{(n+1)} E + q_1^{(n+1)} A + \dots + q_{n-1}^{(n+1)} A^{n-1}, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned}
q_0^{(n+1)} &= q_{n-1}^{(n)} q_0^{(n)}, \\
q_1^{(n+1)} &= q_0^{(n)} + q_{n-1}^{(n)} q_1^{(n)}, \\
q_2^{(n+1)} &= q_1^{(n)} + q_{n-1}^{(n)} q_2^{(n)}, \\
&\dots\dots\dots \\
q_{n-1}^{(n+1)} &= q_{n-2}^{(n)} + q_{n-1}^{(n)} q_{n-1}^{(n)}.
\end{aligned}$$

Аналогично получаем получаем:

$$A^{n+2} = q_0^{(n+2)} E + q_1^{(n+2)} A + \dots + q_{n-1}^{(n+2)} A^{n-1}, \quad (25)$$

$$A^{n+s} = q_0^{(n+s)} E + q_1^{(n+s)} A + \dots + q_{n-1}^{(n+s)} A^{n-1}, \dots \quad (26)$$

Подстановка соотношений (24)-(26) в ряд (20) приводит (после перегруппировки членов) к представлению (19) экспоненциала e^{tA} .

Упражнение 2.1. Выписать ряды для коэффициентов $p_0(t), p_1(t), \dots, p_{n-1}(t)$ в формуле (19) и доказать сходимость этих рядов при любом t .

Замечание 2.3. В формуле (19) фактически могут отсутствовать несколько старших степеней матрицы A . Например, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

из [примера 2.7](#), где $n = 3$, мы получили $e^{tA} = ch(t) \cdot E + sh(t) \cdot A$, т.е. здесь в представлении $e^{tA} = p_0(t)E + p_1(t)A + p_2(t)A^2$, $n = 3$, $n-1 = 2$, $p_0(t) = ch(t)$, $p_1(t) = sh(t)$, $p_2(t) = 0$,

член с A^2 фактически отсутствует. В случае $A = E$ имеем:

$$e^{tA} = e^t \cdot E,$$

т.е. здесь

$$p_0(t) = e^t, \quad p_1(t) = \dots = p_{n-1}(t) = 0.$$

Теорема 2.3 будет использоваться [в §15](#) при доказательстве леммы о внутренней точке интеграла.

2.5. Пример применения формулы Коши для нахождения решения линейных систем

Задача Коши

$$\dot{y} = u_2(t), \quad y(0) = a_1, \quad \dot{y}(0) = a_2, \quad (27)$$

$u_2(t)$ - заданная функция, a_1, a_2 - заданные числа, может быть решена двумя последовательными интегрированиями:

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \dot{y}(0) + \int_0^t \dot{y}(s) ds = a_2 + \int_0^t u_2(s) ds, \\
y(t) &= y(0) + \int_0^t \dot{y}(\tau) d\tau = a_1 + \int_0^t (a_2 + \int_0^\tau u_2(s) ds) d\tau = \\
&= a_1 + a_2 t + \int_0^t \left(\int_0^\tau u_2(s) ds \right) d\tau = \\
&= a_1 + a_2 t + \int_0^t (t-s) u_2(s) ds.
\end{aligned}$$

Полагая $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, запишем задачу (27) в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = a_1,$$

$$\dot{x}_2 = u_2, \quad x_2(0) = a_2,$$

или

$$\dot{x} = Ax + u, \quad x(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $u(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2(t) \end{pmatrix}$.

Найдем решение задачи (28), применяя формулу Коши (5). Имеем:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_2(s) \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 t \\ a_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} (t-s)u_2(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 t + \int_0^t (t-s)u_2(s) ds \\ a_2 + \int_0^t u_2(s) ds \end{pmatrix}.$$

т.е.

$$x_1(t) = a_1 + a_2 t + \int_0^t (t-s)u_2(s) ds = y(t),$$

$$x_2(t) = a_2 + \int_0^t u_2(s) ds = \dot{y}(t).$$

Упражнение 2.2. Найти решение задачи Коши

- $\ddot{y} + y = u_2(t)$, $y(0) = a_1$, $\dot{y}(0) = a_2$;
- $y^{(3)} = u_2(t)$, $y(0) = a_1$, $\dot{y}(0) = a_2$, $\ddot{y}(0) = a_3$.

Лекция 3

§ 3. Множество достижимости, множество управляемости. Их представление на основе формулы Коши. Предварительные соображения о решении линейной задачи быстрогодействия

Рассмотрим линейную задачу быстрогодействия

$$\dot{x} = Ax + u; \quad x(t_0) \in M_0, \quad x(t_1) \in M_1; \quad t_1 - t_0 \rightarrow \min$$

с классом допустимых управлений $\mathcal{U} = \mathcal{U}_U$. При изучении этой задачи важную роль играют два множества – множество достижимости и множество управляемости.

3.1. Множество достижимости $X(t) = X(t_0, t, M_0)$

Введём множество $X(t_0, \tau, M_0)$, определяемое множеством M_0 , начальным моментом времени t_0 , числом $\tau > t_0$. (Это множество зависит также от матрицы A и от класса допустимых управлений $\mathcal{U} = \mathcal{U}_U$). Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = Ax + u(t), \quad t_0 \leq t \leq \tau; \quad x(t_0) = x_0 \in M_0 \quad (1)$$

и выпишем её решение по формуле Коши

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} u(s) ds. \quad (2)$$

Поставим вопрос: куда можно перейти к моменту времени τ по траекториям дифференциального уравнения (1), исходящим в начальный момент времени t_0 из различных точек $x_0 \in M_0$, если разрешается использовать всевозможные допустимые управления $u(t) \in \mathcal{U}$? Множество концов $x(\tau)$ описанных выше траекторий образует некоторое множество в E^n , которое называется *множеством достижимости* и обозначается $X(t_0, \tau, M_0)$ (рис.3.1).

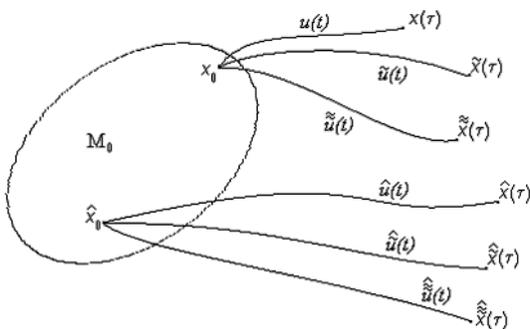


Рисунок 3.1.

Таким образом,

$$X(t_0, \tau, M_0) = \{x \in E^n : x = x(\tau), \text{ формула (2) при } t = \tau; \quad x(t_0) \in M_0, \quad u(t) \in \mathcal{U}\}, \quad (3)$$

или, в более подробной записи,

$$X(t_0, \tau, M_0) = \left\{ x \in E^n : x = e^{(\tau-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{\tau} e^{(\tau-s)A} u(s) ds, \quad x_0 \in M_0, u(s) \in \mathcal{U} \right\}, \quad (4)$$

или

$$X(t_0, \tau, M_0) = \bigcup_{x_0 \in M_0, u(\cdot) \in \mathcal{U}} \left\{ e^{(\tau-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{\tau} e^{(\tau-s)A} u(s) ds \right\}. \quad (5)$$

Естественно считать, что $X(t_0, t, M_0)|_{t=t_0} = M_0$. Для множества достижимости часто удобно использовать обозначение:

$X(t) = X(t_0, t, M_0)$. Множество $X(t)$ с ростом t изменяется. При достаточно малых значениях $t - t_0 > 0$

$$X(t) \cap M_1 = \emptyset, \quad (\text{рис.3.2}).$$

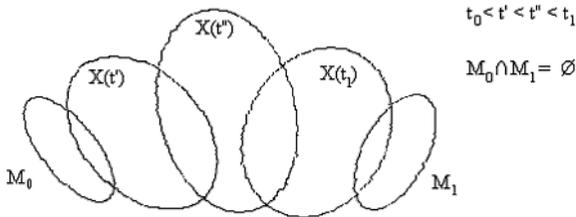


Рисунок 3.2.

Если $t_1 - t_0$ – оптимальное время перехода из M_0 в M_1 , то

$$X(t) \cap M_1 = \emptyset \text{ при } t_0 \leq t < t_1,$$

$$X(t_1) \cap M_1 \neq \emptyset.$$

Подчеркнём, что априори ниоткуда не следует, что множество достижимости $X(t)$ в процессе изменения с течением времени войдёт в контакт с множеством M_1 .

3.2. Множество управляемости $Z(t) = Z(t, t_1, M_1)$

Введём множество $Z(\tau, t_1, M_1)$, определяемое множеством M_1 , моментом времени t_1 , числом $\tau < t_1$. (Это множество зависит также от матрицы A и от класса допустимых управлений $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_v$.) Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = Ax + u(t), \quad \tau \leq t \leq t_1; \quad x(t_1) = x_1 \in M_1. \quad (6)$$

Начальное условие в этой задаче задается на правом конце отрезка $[\tau, t_1]$. Выпишем ее решение по формуле Коши:

$$x(t) = e^{(t-\tau)A} x_1 + \int_{\tau}^t e^{(t-s)A} u(s) ds = e^{(t-\tau)A} x_1 + \int_{\tau}^t e^{(t-s)A} [-u(s)] ds. \quad (7)$$

Множество $Z(\tau, t_1, M_1)$ (множество управляемости) состоит из всех таких точек $z \in E^n$, находясь в которых в момент времени τ , объект в момент времени t_1 попадает на множество M_1 при помощи некоторого допустимого управления:

$$Z(\tau, t_1, M_1) = \{z \in E^n : x = x(\tau), \text{ формула (7) при } t = \tau; x(t_1) \in M_1, u(t) \in \mathcal{Y}\}, \quad (8)$$

или, в более подробной записи,

$$Z(\tau, t_1, M_1) = \left\{ z \in E^n : z = e^{(\tau-t_1)A} x_1 + \int_{\tau}^{t_1} e^{(t_1-s)A} [-u(s)] ds, \quad x_1 \in M_1, u(s) \in \mathcal{Y} \right\}, \quad (9)$$

или

$$Z(\tau, t_1, M_1) = \bigcup_{x_1 \in M_1, u(s) \in \mathcal{Y}} \left\{ e^{(\tau-t_1)A} x_1 + \int_{\tau}^{t_1} e^{(t_1-s)A} [-u(s)] ds \right\}. \quad (10)$$

Естественно считать, что $Z(t, t_1, M_1)|_{t=t_1} = M_1$. Для множества управляемости удобно использовать обозначение: $Z(t) \equiv Z(t, t_1, M_1)$.

Свойства множеств $X(t)$, $Z(t)$ рассмотрены в §8. В случае $t_1 - t_0 = \text{min}$ между множествами $X(t)$ и $Z(t)$ имеется тесная связь, описанная в §11.

3.3. Представление множеств достижимости и управляемости на основе формулы Коши

Имеют место следующие представления:

$$X(t_0, t, M_0) = e^{(t-t_0)A} M_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} \mathcal{Y} ds, \quad (11)$$

$$Z(t, t_1, M_1) = e^{(t-t_1)A} M_1 + \int_{t_1}^t e^{(t-s)A} [-\mathcal{Y}] ds. \quad (12)$$

Обсудим структуру правых частей формул (11), (12). Первые слагаемые имеют вид произведения матрицы (экспоненциала) на множество, а вторые слагаемые имеют вид интеграла от класса допустимых управлений \mathcal{U} . Для обоснования формул (11), (12) ниже вводятся линейные операции над множеством в пространстве E^n , операция интегрирования класса допустимых управлений \mathcal{U} .

3.4. Операции над множествами в пространстве E^n

Определение 3.1. Алгебраической суммой множеств $F_1, F_2 \subset E^n$ называется множество

$$F_1 + F_2 = \{x \in E^n : x = f_1 + f_2, f_1 \in F_1, f_2 \in F_2\},$$

т.е.

$$F_1 + F_2 = \bigcup_{f_1 \in F_1, f_2 \in F_2} (f_1 + f_2).$$

Пример 3.1. Пусть $F_1 = \{x_1 \leq 1, x_2 = 0\}$, $F_2 = \{x_1 = 0, |x_2| \leq 1\}$ – отрезки. Множество $F = F_1 + F_2$ есть квадрат $\{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$, (рис.3.3).

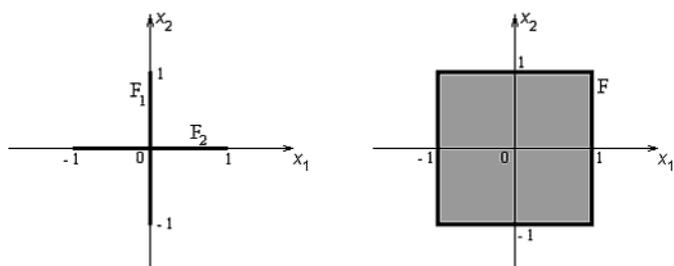


Рисунок 3.3.

Пример 3.2. Пусть $F_1 = \{a\}$ – множество, состоящее из одной точки $a \in E^2$, $F_2 = S_r(0)$ – круг. Тогда (рис.3.4) $F_1 + F_2 = \{a\} + S_r(0) = S_r(a)$ есть круг радиуса r с центром a .

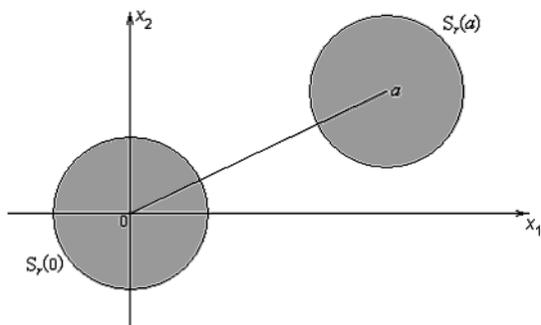


Рисунок 3.4.

Определение 3.2. Произведением $(n \times n)$ -матрицы D на множество $F \subset E^n$ называется множество

$$DF = \{x \in E^n : x = Df, f \in F\},$$

т.е.

$$DF = \bigcup_{f \in F} (Df).$$

Пример 3.3. Пусть

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad F = \{x_1 \leq 1, x_2 = 0\}.$$

Тогда (рис.3.5)

$$DF = \left\{x \in E^2 : x_2 = -x_1, |x_1| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \text{ – отрезок.}$$

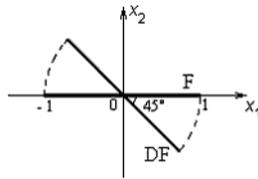


Рисунок 3.5.

Определение 3.3. (Интеграл от класса допустимых управлений.)

Пусть \mathcal{U} – класс допустимых управлений, $D(s)$ – $(n \times n)$ -матрица, непрерывно зависящая от скалярного аргумента $s \in [t_0, t]$; $t_0 < t$.
 Полагаем

$$\int_{t_0}^t D(s) \mathcal{U} ds = \left\{ x \in E^n : x = \int_{t_0}^t D(s) u(s) ds, \quad u(s) \in \mathcal{U} \right\},$$

$$\int_{t_0}^t D(s) [-\mathcal{U}] ds = \left\{ x \in E^n : x = \int_{t_0}^t D(s) [-u(s)] ds, \quad u(s) \in \mathcal{U} \right\}.$$

Из формул (5), (10) и определений 3.1, 3.2, 3.3 следуют представления (11), (12).

Лекция 4

§ 4. Основные обозначения и определения. Наименьшая выпуклая оболочка множества и ее построение. Лемма об отделимости

4.1. Основные обозначения и определения

E^n – n -мерное евклидово пространство,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \dots \text{ – элементы пространства } E^n,$$

$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ – скалярное произведение элементов x и y ,

$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ – норма элемента x ,

$\|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ – расстояние между элементами x и y ,

F – множество, лежащее в пространстве E^n ,

$S_r(a) = \{x \in E^n : \|x - a\| \leq r\}$ – шар радиуса r с центром в точке a ($r \geq 0, a \in E^n$),

$S = \{x \in E^n : \|x\| = 1\}$ – единичная сфера с центром в точке 0 ($0 \in E^n$).

Определение 4.1. Множество F называется *открытым*, если для любой точки $x \in F$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $S_\varepsilon(x) \subset F$:

$\forall x \in F \quad \exists \varepsilon > 0 : S_\varepsilon(x) \subset F$ (рис.4.1).

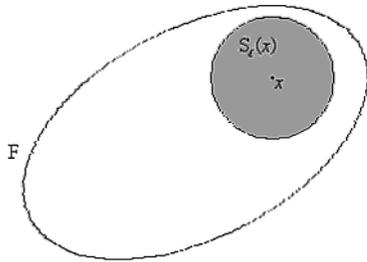


Рисунок 4.1.

Множества

- $F_1 = \{x = (x_1, x_2) \in E^2 : \|x_1\| < 1, \|x_2\| < 1\}$,
- $F_2 = \{x = (x_1, x_2) \in E^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

являются открытыми в E^2 ; множества $S_r(a), S$ не являются открытыми.

Определение 4.2. Точка $a \in E^n$ называется *предельной точкой множества F* , если $\forall \varepsilon > 0 : S_\varepsilon(a) \cap F \neq \emptyset$.

Так, для множества $F = \{x \in E^n : \|x\| < 1\}$ все его предельные точки образуют множество $S_1(0)$.

Определение 4.3. Множество F называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Множества $S_r(0), S$ замкнуты.

Определение 4.4. Множество F называется *ограниченным*, если $\exists R > 0 : F \subset S_R(0)$, см. рис.4.2.

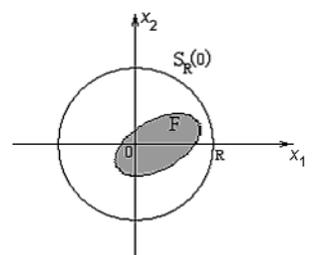


Рисунок 4.2.

Определение 4.5. Модулем множества F называется число

$$|F| = \sup_{f \in F} \|f\| = \inf_{r \geq 0} \{r : F \subset S_r(0)\}.$$

Для любого ограниченного множества F его модуль $|F| < \infty$. Модуль множества $F = \{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$ равен $\sqrt{2}$.

Определение 4.6. Множество F называется *компактом*, если оно замкнуто и ограничено.

Примерами компактов являются множества $S_r(0)$, S , $F = \{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$; множества $F_1 = S_1(0) \setminus \{0\}$, $F_2 = S_1(0) \setminus S$ не являются компактными (нет замкнутости), множество $F_3 = \{x \in E^2 : x_2 \geq 0\}$ (полуплоскость) не является компактом (нет ограниченности).

Определение 4.7. $\Omega(E^n)$ – множество, элементами которого являются всевозможные непустые компакты пространства E^n .

Определение 4.8. Пусть x, y – точки пространства E^n . *Отрезком* $[x, y]$ с концами x, y называется множество

$$[x, y] = \{z \in E^n : z = \lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda \in [0, 1]\},$$

или

$$[x, y] = \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \{\lambda x + (1 - \lambda)y\}.$$

Определение 4.9. Множество F называется *выпуклым*, если

$$x, y \in F \Rightarrow [x, y] \subset F.$$

Так, множество $S_r(a)$ выпукло, а множество S невыпукло. На рис.4.3 изображено невыпуклое множество.

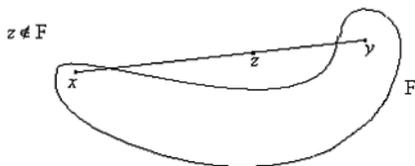


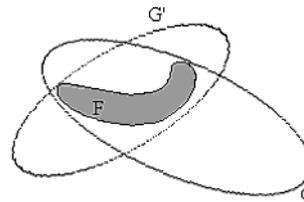
Рисунок 4.3.

Определение 4.10. $\text{conv}\Omega(E^n)$ – множество, состоящее из непустых выпуклых компактов пространства E^n .

Ясно, что $\text{conv}\Omega(E^n) \subset \Omega(E^n)$.

4.2. Наименьшая выпуклая оболочка множества и её построение

Определение 4.11. Множество $G \subset E^n$ называется *выпуклой оболочкой* множества F , если G выпукло и $G \supset F$.



Выпуклая оболочка множества определяется неединственным образом, см. рис. 4.4.

Рисунок 4.4.

Определение 4.12. Множество H называется *наименьшей выпуклой оболочкой* множества F , если

- H – выпуклая оболочка,
- для любой выпуклой оболочки G множества F выполняется $G \supset H$.

Обозначение наименьшей выпуклой оболочки множества

$$H = \text{conv } F.$$

Для невыпуклого множества F , изображенного на рис.4.5а, наименьшая выпуклая оболочка $\text{conv } F$ изображена на рис.4.5 б.



Рисунок 4.5.

Если множество F выпукло, то $\text{conv} F = F$. Для множества F , состоящего из трех точек (рис.4.6), $\text{conv} F$ есть треугольник.

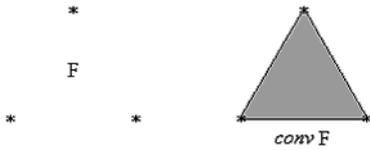


Рисунок 4.6.

Теорема 4.1. (о построении наименьшей выпуклой оболочки)

Для любого множества $F \subset \mathbb{E}^n$ существует наименьшая выпуклая оболочка $\text{conv} F$, которую можно построить следующим образом. Рассмотрим последовательность множеств

$$F_0 = F,$$

$$F_1 = \bigcup_{x,y \in F_0} [x,y],$$

$$F_2 = \bigcup_{x,y \in F_1} [x,y],$$

...

$$F_{m+1} = \bigcup_{x,y \in F_m} [x,y],$$

...

Положим $H = \bigcup_{m=0}^{\infty} F_m$. Тогда $H = \text{conv} F$.

Доказательство

Для доказательства теоремы следует показать, что

- $F \subset H$,
- множество H выпукло,
- любая выпуклая оболочка G множества F содержит множество H : $G \supset H$

(см. определения [4.11](#), [4.12](#)).

Из построения множеств F_m , H следует свойство монотонности:

$$F = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_m \subset \dots \subset H.$$

Проверим выпуклость множества H : $x, y \in H \Rightarrow [x, y] \subset H$. Возьмем две точки $x, y \in H$. Существует такой номер m_1 , что $x \in F_{m_1}$; существует такой номер m_2 , что $y \in F_{m_2}$. Тогда из свойства монотонности следует, что $x, y \in F_m$, где $m = \max\{m_1, m_2\}$, и, привлекая определение множества F_{m+1} , получаем, что отрезок $[x, y] \subset F_{m+1} \subset H$. Доказана выпуклость множества H . Итак, H – выпуклая оболочка множества F .

Пусть теперь G – любая выпуклая оболочка множества F . Тогда

$$F = F_0 \subset G,$$

$$F_1 \subset G,$$

$$\begin{aligned}
 &F_2 \subset G, \\
 &\dots, \\
 &F_{m+1} \subset G, \\
 &\dots, \\
 &H = \bigcup_{m=0}^{\infty} F_m \subset G,
 \end{aligned}$$

т.е. доказано, что $H = \text{conv } F$.

Замечание 4.1. Существует такой наименьший номер $s = s(n, F)$, что $F_s = F_{s+1} = \dots = H$, причем $0 \leq s \leq n$.

Так, например, для выпуклого множества F имеем $F_0 = F_1 = \dots = H$, т.е. $s = 0$. Для множества F , состоящего из отрезка и точки, не лежащей на этом отрезке, (рис. 4.7),

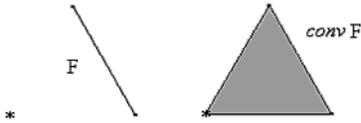


Рисунок 4.7.

имеем: $n = 2, s = 1$, $F_0 \neq F_1 = F_2 = \dots = H$. Для множества F , рассмотренного выше (рис. 4.6), $n = 2, s = 2$,

$$F_0 \subset F_1 \subset F_2 = F_3 = \dots = H, \quad F_0 \neq F_1, F_1 \neq F_2.$$

Замечание 4.2. Последовательность множеств $\{F_m\}$, введённая в теореме 4.1, может быть определена соотношениями

$$F_0 = F, \quad F_{m+1} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} (\lambda F_m + (1-\lambda)F_m), \quad m = 0, 1, \dots$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 F_{m+1} &= \bigcup_{x,y \in F_m} [x,y] = \bigcup_{x,y \in F_m} \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda x + (1-\lambda)y\} = \\
 &= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \bigcup_{x,y \in F_m} \{\lambda x + (1-\lambda)y\} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda F_m + (1-\lambda)F_m\}.
 \end{aligned}$$

Упражнение 4.1. Установить включение $F \subset \lambda F + (1-\lambda)F \quad \forall \lambda \in [0,1]$.

Включение $F \supset \lambda F + (1-\lambda)F, \lambda \in (0,1)$, может не выполняться. Так при $n = 1, F = (-1, +1), \lambda = \frac{1}{2}$ имеем $\frac{1}{2}F + \frac{1}{2}F = (-1, 0, +1)$, т.е. множество F не содержит множество $\frac{1}{2}F + \frac{1}{2}F$.

Упражнение 4.2. Показать, что для выпуклого множества F при любом $\lambda \in [0,1]$

$$F = \lambda F + (1-\lambda)F.$$

Упражнение 4.3. Алгебраическая сумма множеств $F_1 + F_2$ выпуклых множеств F_1, F_2 является выпуклым множеством.

Упражнение 4.4. Если F — выпуклое множество, D — $(n \times n)$ -матрица, то множество DF выпукло.

Упражнение 4.5. Доказать утверждение о стабилизации цепочки множеств $\{F_m\}$ в конечномерном пространстве E^n , см.

Замечание 4.1.

Упражнение 4.6. Если $F \in \Omega(E^n)$, то $\text{conv } F \in \text{conv } \Omega(E^n)$.

4.3. Лемма об отделимости (строгая отделимость) и её геометрическая интерпретация. Опорная гиперплоскость

Лемма 4.1.

Пусть

- $H \in \text{conv } \Omega(E^n)$ (H — выпуклый компакт),
- $x_0 \notin H$ (точка x_0 не принадлежит компакт H).

Тогда

$$\exists \psi \neq 0: (h - x_0, \psi) < 0 \quad \forall h \in H, \quad (I)$$

$$\exists \psi_0 \in S: (h - x_0, \psi) < 0 \quad \forall h \in H. \quad (2)$$

Утверждения (1) и (2) равносильны. Лемма об отделимости имеет простой геометрический смысл (рис. 4.8):

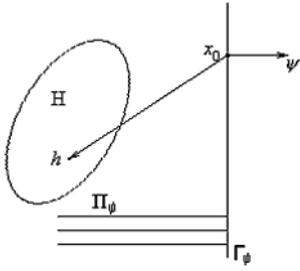


Рисунок 4.8.

через точку x_0 можно провести гиперплоскость Γ_ψ с вектором нормали ψ такую, что компакт H лежит по одну сторону от гиперплоскости и не имеет с ней общих точек. Другими словами, компакт H лежит в открытом полупространстве Π_ψ , ограниченном гиперплоскостью Γ_ψ . Неравенство (1) означает, что вектор ψ образует с векторами $h - x_0$ тупой угол при любом $h \in H$.

Обратимся к доказательству леммы.

Доказательство

1. Конструктивное описание вектора ψ . Пусть h_0 – ближайшая к x_0 точка множества H , т.е.

$$\min_{h \in H} \|h - x_0\| = \|h_0 - x_0\| > 0. \quad (3)$$

Отметим, что точка h_0 называется *проекцией точки x_0 на компакт H* (обозначение: $h_0 = pr_H x_0$) (рис. 4.9). Минимум в (3) на основании теоремы Вейерштрасса достигается в некоторой точке $h_0 \in H$, причем строгое неравенство $\|h_0 - x_0\| > 0$ выполняется, так как $x_0 \notin H$ и H – компакт. Полагаем

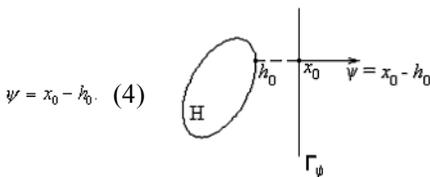


Рисунок 4.9.

2. Покажем теперь, что с определенным равенством (4) вектором ψ справедливо неравенство (1), т.е.

$$(h - x_0, x_0 - h_0) < 0 \quad \forall h \in H.$$

Последнее неравенство равносильно следующему

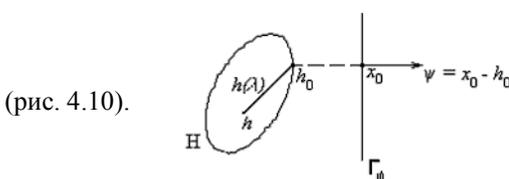
$$(h - x_0, h_0 - x_0) > 0 \quad \forall h \in H. \quad (5)$$

Неравенство (5) при $h = h_0$ верно, так как $\|h_0 - x_0\| > 0$. Покажем, что

$$(h - x_0, h_0 - x_0) \geq \|h_0 - x_0\|^2 > 0 \quad \forall h \in H. \quad (6)$$

Возьмем любую точку $h \in H, h \neq h_0$, и рассмотрим отрезок

$$[h, h_0] = \{h(\lambda) = \lambda h + (1 - \lambda)h_0, \lambda \in [0, 1]\},$$



(рис. 4.10).

Рисунок 4.10.

В силу выпуклости множества H имеем: $h(\lambda) \in H \quad \forall \lambda \in [0,1]$. Поэтому в силу (3)

$$\|h(\lambda) - x_0\|^2 \geq \|k_0 - x_0\|^2 \quad \forall \lambda \in [0,1]. \quad (7)$$

Неравенство (7) последовательно преобразуется следующим образом:

$$\|\lambda h + (1-\lambda)k_0 - x_0\|^2 \geq \|k_0 - x_0\|^2,$$

$$\|\lambda(h - k_0) + (k_0 - x_0)\|^2 \geq \|k_0 - x_0\|^2,$$

$$\lambda^2 \|h - k_0\|^2 + 2\lambda \langle h - k_0, k_0 - x_0 \rangle + \|k_0 - x_0\|^2 \geq \|k_0 - x_0\|^2,$$

$$\lambda \|h - k_0\|^2 + 2 \langle h - k_0, k_0 - x_0 \rangle \geq 0.$$

Переход к пределу при $\lambda \rightarrow +0$ в последнем неравенстве даёт

$$\langle h - k_0, k_0 - x_0 \rangle \geq 0 \quad \forall h \in H. \quad (8)$$

Докажем теперь неравенство (6), привлекая (8). Имеем

$$\langle h - x_0, k_0 - x_0 \rangle = \langle h - k_0 + k_0 - x_0, k_0 - x_0 \rangle = \langle h - k_0, k_0 - x_0 \rangle + \|k_0 - x_0\|^2 \geq \|k_0 - x_0\|^2 \quad \forall h \in H.$$

Замечание 4.3. Оба условия леммы об отделимости существенны: утверждение леммы не сохраняется при отсутствии выпуклости компакта H , при нарушении замкнутости или ограниченности множества H , при $x_0 \in H$.

Замечание 4.4. Если k_0 – граничная точка выпуклого компакта H , то

$$\exists \psi \in E^n, \psi \neq 0 : \langle h - k_0, \psi \rangle \leq 0 \quad \forall h \in H. \quad (9)$$

С геометрической точки зрения это означает, что через точку k_0 можно провести гиперплоскость

$$\Gamma_\psi = \{x \in E^n : \langle x - k_0, \psi \rangle = 0\},$$

которая делит все пространство E^n на два полупространства, одно из которых (полупространство $\Pi_\psi = \{x \in E^n : \langle x - k_0, \psi \rangle \leq 0\}$)

содержит выпуклый компакт $H : \Pi_\psi \supset H$ (рис. 4.11).

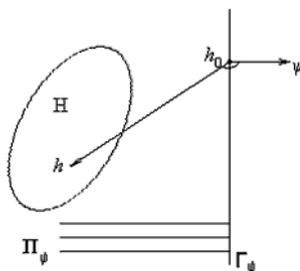


Рисунок 4.11.

Гиперплоскость Γ_ψ называется *опорной гиперплоскостью* для компакта H . Неравенство (9) запишем в форме

$$\langle h, \psi \rangle \leq \langle k_0, \psi \rangle \quad \forall h \in H.$$

Из него следует, что

$$c(H, \psi) \equiv \max_{h \in H} \langle h, \psi \rangle = \langle k_0, \psi \rangle.$$

Функция $c(H, \psi)$, определяемая компактом H , называется *опорной функцией* этого компакта в направлении вектора ψ . При помощи этой функции можно описать гиперплоскость Γ_ψ и полупространство Π_ψ :

$$\Gamma_\psi = \{x \in E^n : \langle x, \psi \rangle = c(H, \psi)\},$$

$$\Pi_\psi = \{x \in E^n : \langle x, \psi \rangle \leq c(H, \psi)\}.$$

Достаточно представительный набор опорных гиперплоскостей $\Gamma_{\nu_1}, \Gamma_{\nu_2}, \dots, \Gamma_{\nu_n}$ позволяет строить аппроксимации выпуклых компактов в форме пересечения полупространств $\Pi_{\nu_1}, \Pi_{\nu_2}, \dots, \Pi_{\nu_n}$, каждое из которых, как мы видим, описывается опорной функцией $c(H, \nu)$ компакта H .

В следующем параграфе проводится подробное изучение опорных функций.

Лекция 5

§ 5. Опорные функции ограниченных множеств

Опорные функции представляют собой удобный аналитический аппарат для описания выпуклых компактов. Этот аппарат в дальнейшем будет применяться при изучении линейной задачи быстрого действия. Опорные функции удобно применять не только для изложения теории, но и при построении численных методов решения задачи быстрого действия.

5.1. Предварительные геометрические соображения

Рассмотрим выпуклый компакт F на плоскости. Ясно, что компакт F можно приближённо представить при помощи описанных выше многоугольников, (рис. 5.1), причем при подходящем увеличении числа сторон выпуклого многоугольника выпуклый компакт F может быть представлен весьма точно.

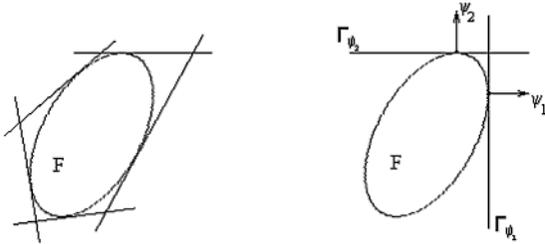


Рисунок 5.1.

Если выбрать достаточно представительный набор векторов $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_N \in S$, то получим

$$F \subset \bigcap_{k=0}^N \Pi_{\psi_k} \equiv M_N,$$

где пересечение конечного числа полупространств (полуплоскостей) – выпуклый многоугольник M_N – даёт достаточно точное описание выпуклого компакта F . Мы покажем далее, что выпуклый компакт $F \subset E^n$ может быть получен как пересечение всех полупространств Π_{ψ} , когда вектор ψ пробегает единичную сферу S :

$$F = \bigcap_{\psi \in S} \Pi_{\psi}, \quad \Pi_{\psi} = \{x \in E^n : (x, \psi) \leq c(F, \psi)\}.$$

Так как каждое из опорных полупространств описывается с помощью опорной функции $c(F, \psi)$ компакта F , то на этом пути мы приходим к возможности аналитического описания выпуклых компактов при помощи их опорных функций.

Эти геометрические соображения полезно иметь в виду при изучении материала §5.

5.2. Определение опорной функции ограниченных множеств

Пусть F – ограниченное множество, лежащее в некотором шаре $S_R(0)$ пространства E^n , ψ – вектор пространства E^n .

Определение 5.1. Опорной функцией множества F называется функция, определяемая равенством

$$c(F, \psi) = \sup_{f \in F} (f, \psi). \quad (1)$$

Опорная функция любого ограниченного множества принимает конечные значения при любом векторе $\psi \in E^n$. Действительно, $|(f, \psi)| \leq \|f\| \|\psi\|$,

$$(f, \psi) \leq \|\psi\| \sup_{f \in F} \|f\| \quad (2)$$

где число $|F| = \sup_{f \in F} \|f\|$ называемое *модулем множества F* , не превосходит R . Отсюда вытекает оценка

$$c(F, \psi) \leq |F| \|\psi\|. \quad (3)$$

Ясно также, что

$$|c(F, \psi)| \leq |F| \|\psi\|.$$

Замечание 5.1. Множество F может быть незамкнутым и невыпуклым.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 5.1. Рассмотрим на плоскости E^2 множество $F = S_1(0)$ – круг радиуса 1 с центром в начале координат – и найдём его опорную функцию:

$$c(F, \psi) = \sup_{\|f\| \leq 1} (f, \psi) = \max_{\|f\| \leq 1} (f, \psi) = \|\psi\| = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}.$$

Пример 5.2. Рассмотрим на плоскости E^2 множество $F = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ – открытый круг радиуса 1 с центром в начале координат – и найдём его опорную функцию:

$$c(F, \psi) = \sup_{\|f\| < 1} (f, \psi) = \|\psi\| = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}.$$

Пример 5.3. Рассмотрим на плоскости E^2 множество $F = S = \{x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ – окружность радиуса 1 с центром в начале координат – и найдём её опорную функцию:

$$c(F, \psi) = \sup_{\|f\| = 1} (f, \psi) = \max_{\|f\| = 1} (f, \psi) = \|\psi\| = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}.$$

В рассмотренных выше трех примерах различные множества имеют одну и ту же опорную функцию. Множества из примеров 5.1, 5.2 (замкнутый, открытый круги) связаны между собой: первое множество является замыканием второго. Имеется связь и между множествами из примеров 5.1 и 5.3: единичный круг $S_1(0)$ является наименьшей выпуклой оболочкой окружности S .

Пример 5.4. Найдём опорную функцию множества $F = \{x \in E^n : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$ (квадрат, см. рис. 5.2).

Решение

$$c(F, \psi) = \max_{f \in F} (f, \psi) = \max_{|f_1| \leq 1, |f_2| \leq 1} (f_1 \psi_1 + f_2 \psi_2) = |\psi_1| + |\psi_2|.$$

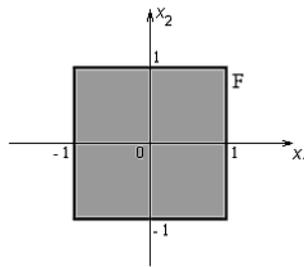


Рисунок 5.2.

Упражнение 5.1. Выяснить, является ли опорная функция множеств из примеров 5.1 – 5.4 дифференцируемой функцией аргумента $\psi = (\psi_1, \psi_2)$.

Выясним геометрический смысл опорной функции. Пусть F – компакт, $c(F, \psi)$ – его опорная функция, а вектор $\psi \in S$, т.е. $\|\psi\| = 1$, $c(F, \psi) = \max_{f \in F} (f, \psi) = (f_0, \psi)$, $f_0 \in F$, (рис. 5.3).

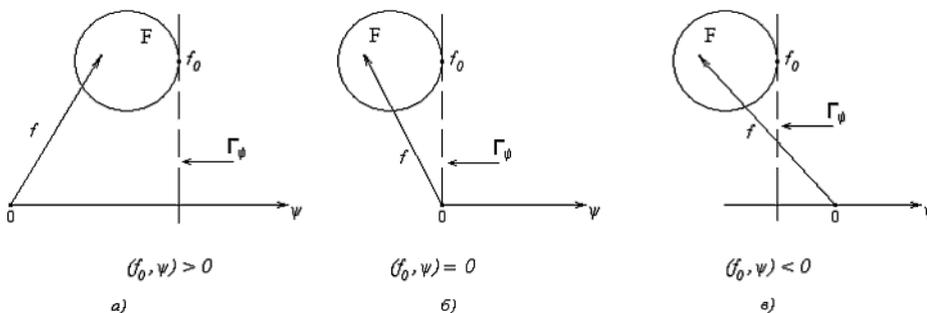


Рисунок 5.3.

Опорная функция $c(F, \psi) = (f_0, \psi)$ равна наибольшей величине проекции векторов $f \in F$ на единичный вектор ψ . Знак (f_0, ψ) характеризует взаимное расположение множества F и точки 0 относительно опорной гиперплоскости Γ_ψ :

- если $(f_0, \psi) > 0$, то компакт F и начало координат 0 расположены по одну сторону от опорной гиперплоскости Γ_ψ , (рис. 5.3, а);

- если $(f_0, \psi) = 0$, то $0 \in \Gamma_\psi$, (рис. 5.3, б);
- если $(f_0, \psi) < 0$, то компакт F и начало координат 0 расположены по разные стороны от опорной гиперплоскости Γ_ψ , (рис. 5.3, в).

При $\psi \in \mathcal{S}$ опорная функция $c(F, \psi)$ равна расстоянию от начала координат до опорной гиперплоскости Γ_ψ , причём расстоянию приписывается определённый знак.

5.3. Простейшие свойства опорных функций (свойства 1–10)

Здесь будут рассмотрены 10 простейших свойств опорной функции.

Свойство 1

а) пусть $F \in \Omega(E^n)$, тогда $c(F, \psi) = \max_{f \in F} (f, \psi)$;

б) пусть F – ограниченное множество, лежащее в пространстве E^n , а \bar{F} – замыкание множества F , тогда $c(F, \psi) = c(\bar{F}, \psi)$.

Доказательство

В силу непрерывности скалярного произведения (f, ψ) (по аргументу f) для компактного множества F $\max_{f \in F} (f, \psi)$ достигается в некоторой точке $f_0 \in F$ (теорема Вейерштрасса), поэтому вместо точной верхней грани (\sup) в формуле (1) можно записать знак максимума (\max), что доказывает утверждение а). Утверждение б) вытекает из определений опорной функции, замыкания множества и непрерывности скалярного произведения (f, ψ) .

Свойство 1 можно проиллюстрировать примерами [5.1](#), [5.2](#).

Свойство 2 (положительная однородность опорной функции по второму аргументу)

$$c(F, \lambda\psi) = \lambda c(F, \psi) \quad \forall \lambda \geq 0, \psi \in E^n.$$

Доказательство

Имеем:

$$c(F, \lambda\psi) = \sup_{f \in F} (f, \lambda\psi) = \sup_{f \in F} \lambda (f, \psi) = \lambda \sup_{f \in F} (f, \psi) = \lambda c(F, \psi).$$

↓

Для множества $F = S_1(0)$ из [примера 5.1](#) $c(F, \psi) = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}$. Пусть $\lambda \geq 0, \psi = (\psi_1, \psi_2)$, тогда $\lambda\psi = (\lambda\psi_1, \lambda\psi_2), c(F, \lambda\psi) = \sqrt{(\lambda\psi_1)^2 + (\lambda\psi_2)^2} = \lambda c(F, \psi)$.

Проверить выполнение свойства 2 для множества из примера 5.4.

Упражнение 5.2. Являются ли функции $g_1 = \psi_1^2 + \psi_2^2, g_2 = 1 + \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}$ опорными функциями некоторого компакта $F \in \Omega(E^2)$?

Свойство 3

$$c(F, \psi_1 + \psi_2) \leq c(F, \psi_1) + c(F, \psi_2) \quad \forall \psi_1, \psi_2 \in E^n.$$

Доказательство

Пусть \bar{F} – замыкание ограниченного множества F . Тогда $\bar{F} \in \Omega(E^n)$ и, привлекая свойство 1, получаем:

$$c(F, \psi_1 + \psi_2) = c(\bar{F}, \psi_1 + \psi_2) = \max_{f \in \bar{F}} (f, \psi_1 + \psi_2) = (f_0 \in \bar{F}) = (f_0, \psi_1 + \psi_2) = (f_0, \psi_1) + (f_0, \psi_2) \leq$$

$$\leq \max_{f \in \bar{F}} (f, \psi_1) + \max_{f \in \bar{F}} (f, \psi_2) = c(\bar{F}, \psi_1) + c(\bar{F}, \psi_2) = c(F, \psi_1) + c(F, \psi_2).$$

Упражнение 5.3. Доказать выпуклость опорной функции $c(F, \psi)$ по второму аргументу (использовать определение выпуклости функции и свойства 2, 3 опорных функций). Проверить выполнение этого утверждения в [примере 5.1](#).

Свойство 4 (условие Липшица по второму аргументу)

$$|c(F, \psi_1) - c(F, \psi_2)| \leq |F| \|\psi_1 - \psi_2\| \quad \forall \psi_1, \psi_2 \in E^n;$$

здесь $|F| = \sup_{f \in F} \|f\|$ – модуль множества F ; множитель $|F|$ играет роль константы Липшица.

Доказательство

Используя свойство 3, получаем:

$$c(F, \psi_1) = c(F, (\psi_1 - \psi_2) + \psi_2) \leq c(F, \psi_1 - \psi_2) + c(F, \psi_2).$$

Отсюда, привлекая неравенство (2), находим:

$$c(F, \psi_1) - c(F, \psi_2) \leq |F| \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

Поменяв роли векторов ψ_1 и ψ_2 в предыдущих рассуждениях, приходим к неравенству

$$c(F, \psi_2) - c(F, \psi_1) \leq |F| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

Из двух последних неравенств вытекает двойное неравенство

$$-|F| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\| \leq c(F, \psi_1) - c(F, \psi_2) \leq |F| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

т.е.

$$|c(F, \psi_1) - c(F, \psi_2)| \leq |F| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

Следствие Опорная функция $c(F, \psi)$ непрерывна по второму аргументу:

$$c(F, \psi') \rightarrow c(F, \psi), \quad \psi' \rightarrow \psi.$$

Свойство 5. (опорная функция линейно преобразованного множества)

Пусть D – квадратная матрица n -го порядка. Тогда

$$c(DF, \psi) = c(F, D^* \psi) \quad \forall \psi \in E^n,$$

где D^* – матрица, полученная из матрицы D транспонированием.

Доказательство

Свойство 5 вытекает из определений опорной функции, операции линейного преобразования множества и свойств скалярного произведения

$$c(DF, \psi) = \sup_{x \in DF} (x, \psi) = (x \in DF \Leftrightarrow x = Df, f \in F) = \sup_{f \in F} (Df, \psi) = \sup_{f \in F} (f, D^* \psi) = c(F, D^* \psi).$$

В частном случае матрицы $D = \alpha E$, где α – число, E – единичная матрица, множество

$$DF = (\alpha E)F = \alpha F,$$

и на основании свойства 5

$$c(\alpha F, \psi) = c(F, \alpha \psi).$$

Если число $\alpha \geq 0$, то, привлекая свойство 2, получаем

$$c(\alpha F, \psi) = \alpha \cdot c(F, \psi) \quad \forall \alpha \geq 0, \quad \psi \in E^n.$$

Итак, имеет место

Свойство 6. (положительная однородность по первому аргументу)

$$c(\alpha F, \psi) = \alpha \cdot c(F, \psi) \quad \forall \alpha \geq 0, \quad \psi \in E^n.$$

Свойство 7. (аддитивность по первому аргументу)

$$c(F_1 + F_2, \psi) = c(F_1, \psi) + c(F_2, \psi).$$

Доказательство

Используя определение опорной функции и операции алгебраического сложения множеств, получаем

$$\begin{aligned} c(F_1 + F_2, \psi) &= \sup_{x \in F_1 + F_2} (x, \psi) = (x \in F_1 + F_2 \Leftrightarrow x = f_1 + f_2, f_1 \in F_1, f_2 \in F_2) = \sup_{f_1 \in F_1, f_2 \in F_2} (f_1 + f_2, \psi) = \\ &= \sup_{f_1 \in F_1} (f_1, \psi) + \sup_{f_2 \in F_2} (f_2, \psi) = c(F_1, \psi) + c(F_2, \psi). \end{aligned}$$

Свойство 8

$$а) \quad c(F_1 \cup F_2, \psi) = \max\{c(F_1, \psi), c(F_2, \psi)\},$$

б) для семейства $\{F_\lambda\}$ равномерно ограниченных множеств, зависящих от параметра λ , принадлежащего некоторому множеству Λ ($\exists R > 0 : |F_\lambda| \leq R \quad \forall \lambda \in \Lambda$)

$$c\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda, \psi\right) = \sup_{\lambda \in \Lambda} c(F_\lambda, \psi).$$

Доказательство

В случае а) получаем

$$c(F_1 \cup F_2, \psi) = \sup_{x \in F_1 \cup F_2} (x, \psi) = \max\{\sup_{x \in F_1} (x, \psi), \sup_{x \in F_2} (x, \psi)\} = \max\{c(F_1, \psi), c(F_2, \psi)\}.$$

В случае б) множество $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ ограничено (оно принадлежит шару $S_R(0)$) и

$$c\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda, \psi\right) = \sup_{x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda} (x, \psi) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \sup_{x \in F_\lambda} (x, \psi) = \sup_{\lambda \in \Lambda} c(F_\lambda, \psi).$$

Свойство 9

Пусть λ_1, λ_2 – неотрицательные числа, F_1, F_2 – ограниченные множества, лежащие в пространстве E^n . Тогда

$$c(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2, \psi) = \lambda_1 c(F_1, \psi) + \lambda_2 c(F_2, \psi) \quad \forall \psi \in E^n.$$

Доказательство

Свойство 9 вытекает из свойств 7 и 6.

Свойство 10. (совпадение опорных функций множества и его наименьшей выпуклой оболочки)

$$c(F, \psi) = c(\text{conv } F, \psi) \quad \forall \psi \in E^n. \quad (4)$$

Доказательство

В §4 доказано, что

$$\text{conv } F = H \equiv \bigcup_{m=0}^{\infty} F_m,$$

где

$$F_0 = F, \quad F_{m+1} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} (\lambda F_m + (1-\lambda)F_m), \quad m = 0, 1, \dots$$

Привлекая свойство 8 б), можно записать

$$c(\text{conv } F, \psi) = c\left(\bigcup_{m \geq 0} F_m, \psi\right) = \sup_{m \geq 0} c(F_m, \psi). \quad (5)$$

Покажем, что

$$c(F_m, \psi) = c(F, \psi), \quad m = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Тогда из (5), (6) вытекает утверждение (4) свойства 10.

Ясно, что $c(F_0, \psi) = c(F, \psi)$. Далее $F_1 = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} (\lambda F_0 + (1-\lambda)F_0)$ и, используя свойства 8 б) и 9, получаем

$$c(F_1, \psi) = \sup_{\lambda \in [0,1]} c(\lambda F_0 + (1-\lambda)F_0, \psi) = \sup_{\lambda \in [0,1]} (\lambda c(F_0, \psi) + (1-\lambda)c(F_0, \psi)) = \sup_{\lambda \in [0,1]} c(F_0, \psi) = c(F_0, \psi).$$

Итак, равенство (6) верно при $m = 0, 1$; его справедливость для любого номера m устанавливается индукцией.

Мы изучили первую группу свойств (свойства 1 – 10) опорных функций. Далее рассмотрены примеры нахождения опорных функций некоторых множеств. При разборе этих примеров привлекаются изученные выше свойства опорных функций.

5.4. Примеры

Пример 1 Найти опорную функцию множества

$$F_1 = S_1(0) = \{x \in E^n : \|x\| \leq 1\} \in \Omega(E^n)$$

(единичный шар в пространстве E^n).

Решение

Так как $(f, \psi) \leq \|f\| \cdot \|\psi\|$, $(f, \psi)|_{f \in F_1} = \|\psi\|$ то

$$c(F_1, \psi) = \max_{\|f\| \leq 1} (f, \psi) = \|\psi\| = \sqrt{\psi_1^2 + \dots + \psi_n^2}; \quad \psi = (\psi_1, \dots, \psi_n).$$

Пример 2 Найти опорную функцию множества

$$F_2 = S_r(0) \in \Omega(\mathbb{E}^n)$$

(шар радиуса $r \geq 0$ с центром в начале координат).

Решение

Замечая, что $S_r(0) = r \cdot S_1(0)$ и, используя свойство 6 и результат примера 1, получаем:

$$c(F_2, \psi) = c(r \cdot S_1(0), \psi) = r \cdot c(S_1(0), \psi) = r \|\psi\|.$$

Пример 3 Найти опорную функцию множества

$$F_3 = \{a\} \in \Omega(\mathbb{E}^n),$$

состоящего из одной точки $a \in \mathbb{E}^n$.

Решение

По определению опорной функции

$$c(F_3, \psi) = (a, \psi) = a_1 \psi_1 + \dots + a_n \psi_n.$$

Пример 4 Найти опорную функцию множества

$$F_4 = S_r(a) \in \Omega(\mathbb{E}^n)$$

(шар радиуса $r \geq 0$ с центром в точке $a \in \mathbb{E}^n$).

Решение

Привлекая равенство $S_r(a) = \{a\} + S_r(0)$, [свойство 7](#) и результат примеров 2, 3 получаем:

$$c(F_4, \psi) = c(\{a\}, \psi) + c(S_r(0), \psi) = (a, \psi) + r \|\psi\| = a_1 \psi_1 + \dots + a_n \psi_n + r \sqrt{\psi_1^2 + \dots + \psi_n^2}.$$

Установленное соотношение будет использовано при дальнейшем изложении курса.

Пример 5 Найти опорную функцию множества

$$F_5 = \{-v, v\}, v \in \mathbb{E}^n,$$

состоящего из двух точек $-v$ и v .

Решение

По определению опорной функции

$$c(F_5, \psi) = \max\{(-v, \psi), (v, \psi)\} = |(v, \psi)|.$$

Пример 6 Найти опорную функцию множества

$$F_6 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in \Omega(\mathbb{E}^2),$$

состоящего из двух точек $(-1, 0)$ и $(1, 0)$.

Решение

По определению опорной функции

$$c(F_6, \psi) = \max\{-\psi_1, \psi_1\} = |\psi_1|.$$

Пример 7 Найти опорную функцию множества

$$F_7 = \{x \in \mathbb{E}^2 : |x_1| \leq 1, x_2 = 0\}.$$

(отрезок на плоскости с концами $(-1, 0)$ и $(1, 0)$).

Решение

Имеем:

$$c(F_7, \psi) = \max_{x \in F_7} (x, \psi) = |\psi_1|.$$

Мы видим, что $c(F_7, \psi) = c(F_6, \psi)$; это иллюстрирует свойство 10, так как $F_7 = \text{conv } F_6$.

Пример 8 Найти опорную функцию множества

$$F_8 = \left\{ \begin{pmatrix} (-1, -1) \\ (-1, 1) \\ (1, -1) \\ (1, 1) \end{pmatrix} \right\} \in \Omega(\mathbb{E}^2),$$

состоящего из четырёх точек, расположенных в вершинах квадрата.

Решение

Имеем:

$$c(F_8, \psi) = \max_{x \in F_8} (x, \psi) = |\psi_1| + |\psi_2|.$$

Пример 9 Найти опорную функцию множества

$$F_9 = \{x \in \mathbb{E}^2 : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\} \in \Omega(\mathbb{E}^2)$$

(квадрат).

Решение

Имеем:

$$c(F_9, \psi) = \max_{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1} (x_1 \psi_1 + x_2 \psi_2) = |\psi_1| + |\psi_2|.$$

Совпадение опорных функций множеств F_8 и F_9 опять иллюстрирует [свойство 10](#), так как $F_9 = \text{conv } F_8$.

Пример 10 Найти опорные функции множеств, ограниченных эллипсоидами

- $F_{10} = \mathfrak{E}_a \equiv \{x \in \mathbb{E}^n : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \leq 1, a_i > 0;$
- $F'_{10} = \mathfrak{Q} \equiv \{x \in \mathbb{E}^n : (\mathfrak{Q}x, x) \leq 1\}$, \mathfrak{Q} – симметричная положительно определённая матрица порядка n .

Решение

Для нахождения опорной функции множества F_{10} заметим, что

$$\mathfrak{E}_a = A \cdot S_1(0),$$

где A – диагональная матрица с элементами a_1, \dots, a_n на диагонали, $A = A^*$. Используя [свойство 5](#) и результат [примера 1](#), получаем:

$$c(\mathfrak{E}_a, \psi) = c(AS_1(0), \psi) = c(S_1(0), A\psi) = \|A\psi\|.$$

Так как

$$A\psi = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \psi_1 \\ \vdots \\ a_n \psi_n \end{pmatrix}, \quad \|A\psi\| = \sqrt{a_1^2 \psi_1^2 + \dots + a_n^2 \psi_n^2}.$$

то

$$c(\mathcal{Q}, \psi) = \sqrt{\alpha_1^2 \psi_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \psi_n^2}.$$

Доказать самостоятельно, что $c(\mathcal{Q}, \psi) = \sqrt{(Q^{-1}\psi, \psi)}$.

5.5. Теорема о представлении наименьшей выпуклой оболочки компакта в форме пересечения полупространств. Свойства 11 - 14 опорной функции, вытекающие из этой теоремы

Рассматриваемая теорема, содержащая основной теоретический результат §5, показывает в какой степени множество определяется своей опорной функцией. Как мы видели в примерах [5.1 - 5.3](#), различные множества могут иметь одну и ту же опорную функцию. В [свойстве 10](#) утверждается, что опорные функции множества и его наименьшей выпуклой оболочки совпадают.

Теорема 5.1.

Пусть $F \in \Omega(E^n)$; $c(F, \psi)$ – опорная функция множества F ; $\psi \in E^n$. Тогда

$$\text{conv } F = \bigcap_{\psi \in S} \{x \in E^n : (x, \psi) \leq c(F, \psi)\}. \quad (7)$$

Введем обозначения:

$\Pi_\psi = \{x \in E^n : (x, \psi) \leq c(H, \psi)\}$ – замкнутое полупространство, ограниченное гиперплоскостью $\Gamma_\psi = \{x \in E^n : (x, \psi) = c(H, \psi)\}$ с вектором нормали $\psi \in S$;

$\Pi = \bigcap_{\psi \in S} \Pi_\psi$ – пересечение полупространств Π_ψ по всем векторам $\psi \in S$, где S – единичная сфера;

$H = \text{conv } F$ – наименьшая выпуклая оболочка множества F .

Тогда утверждение (7) теоремы 5.1 можно кратко записать в форме

$$H = \Pi. \quad (8)$$

Теорема утверждает, что наименьшая выпуклая оболочка H компакта F представляется в форме пересечения по векторам $\psi \in S$ полупространств Π_ψ , определяемых опорной функцией компакта F , т.е. $\text{conv } F$ определяется опорной функцией $c(F, \psi)$ компакта F .

Это значит, что по опорной функции $c(F, \psi)$ компакта F может быть однозначно восстановлен не сам компакт F , а только его наименьшая выпуклая оболочка $\text{conv } F$.

Доказательство

Обратимся к доказательству теоремы. Нужно установить равенство (8) – совпадение множеств H и Π .

1. Докажем сначала, что $H \subset \Pi$. Используя определение опорной функции и свойство 10, получаем, что для любой точки $x \in H$

$$(x, \psi) \leq \max_{h \in H} (h, \psi) = c(H, \psi) = c(F, \psi) \quad \forall \psi,$$

следовательно, $x \in \Pi_\psi \quad \forall \psi$, поэтому $x \in \Pi = \bigcap_{\psi \in S} \Pi_\psi$. Это доказывает включение

$$H \subset \Pi. \quad (9)$$

2. Докажем теперь включение

$$H \supset \Pi \quad (10)$$

методом от противного. Отметим, что множество $\Pi \neq \emptyset$, так как $F \neq \emptyset$ и $F \supset \Pi$ (почему?). Допустим, что (10) неверно, тогда существует точка $x_0 \in \Pi, x_0 \notin H$. Так как H – выпуклый компакт и $x_0 \notin H$, то по лемме об отделимости $\exists \psi_0 \in S : (h - x_0, \psi_0) < 0 \quad \forall h \in H$, т.е.

$$(h, \psi_0) < (x_0, \psi_0) \quad \forall h \in H.$$

Отсюда следует, что

$$c(H, \psi_0) = \max_{h \in H} (h, \psi_0) < (x_0, \psi_0),$$

причём неравенство здесь строгое, так как H – компакт. Отсюда, привлекая [свойство 10](#), получаем

$$c(F, \psi_0) = c(H, \psi_0) < (x_0, \psi_0),$$

т.е.

$$(x_0, \psi_0) > c(F, \psi_0). \quad (11)$$

С другой стороны, $x_0 \in \Pi = \bigcap_{\psi \in S} \Pi_\psi$, поэтому $x_0 \in \Pi_{\psi_0}$, следовательно,

$$(x_0, \psi_0) \leq c(F, \psi_0). \quad (12)$$

Сравнение неравенств (11) и (12) приводит к противоречию, которое доказывает включение (10).

3. Из включений (9) и (10) следует равенство (8), которое является краткой записью представления (7).

Теорема доказана.

Следствие из доказанной теоремы о представлении выпуклых компактов в форме пересечения полупространств.

Пусть $F \in \text{conv } \Omega(E^n)$, тогда

$$F = \bigcap_{\psi \in S} \{x \in E^n : (x, \psi) \leq c(F, \psi)\}. \quad (13)$$

Представление (13) показывает, что выпуклый компакт однозначно определяется своей опорной функцией, т.е. в случае $F_1, F_2 \in \text{conv } \Omega(E^n)$,

$$\boxed{F_1 = F_2} \Leftrightarrow \boxed{c(F_1, \psi) = c(F_2, \psi) \quad \forall \psi \in E^n} \Leftrightarrow \boxed{c(F_1, \psi) = c(F_2, \psi) \quad \forall \psi \in S} \quad (14)$$

Пример Найти алгебраическую сумму F двух шаров

$$F_1 = S_{r_1}(a_1), F_2 = S_{r_2}(a_2); \quad r_1, r_2 \geq 0, a_1, a_2 \in E^n.$$

Решение

Ясно, что $F_1, F_2, F \in \Omega(E^n)$. Найдём опорную функцию множества $F = F_1 + F_2$. Используя [свойство 7](#), результат [примера 4](#), получаем

$$c(F, \psi) = c(F_1 + F_2, \psi) = c(F_1, \psi) + c(F_2, \psi) = (a_1 + a_2, \psi) + (r_1 + r_2) \|\psi\| = c(S_{r_1+r_2}(a_1+a_2), \psi).$$

Итак, два выпуклых компакта F и $S_{r_1+r_2}(a_1+a_2)$ имеют одинаковые опорные функции, следовательно, в силу (14) они совпадают, т.е. установлено правило алгебраического сложения двух шаров:

$$S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2) = S_{r_1+r_2}(a_1+a_2).$$

При алгебраическом сложении шаров получается новый шар, причём складываются радиусы шаров и их центры.

Рассмотрим сейчас основанные на доказанной теореме свойства 11 - 14 опорных функций. В этих свойствах речь идёт о формулировке условий включения, непустоты пересечения двух множеств в терминах опорных функций этих множеств.

Свойство 11

Пусть $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$. Тогда

$$\boxed{F_1 \subset F_2} \Rightarrow \boxed{c(F_1, \psi) \leq c(F_2, \psi) \quad \forall \psi \in E^n} \Rightarrow \boxed{\text{conv } F_1 \subset \text{conv } F_2}.$$

Доказательство

Проверим первую импликацию. Если выполнено включение $F_1 \subset F_2$, то

$$c(F_1, \psi) = \max_{f \in F_1} (f, \psi) \leq \max_{f \in F_2} (f, \psi) = c(F_2, \psi) \quad \forall \psi \in E^n.$$

Проверим теперь вторую импликацию. Если выполнено неравенство $c(F_1, \psi) \leq c(F_2, \psi)$, то привлекая представление (7) доказанной выше теоремы, получаем:

$$\text{conv } F_1 = \bigcap_{\psi \in S} \{x \in E^n : (x, \psi) \leq c(F_1, \psi)\} \subset \bigcap_{\psi \in S} \{x \in E^n : (x, \psi) \leq c(F_2, \psi)\} = \text{conv } F_2.$$

Следствие Для $F_1, F_2 \in \text{conv } \Omega(E^n)$

$$\boxed{F_1 \subset F_2} \Leftrightarrow \boxed{c(F_1, \psi) \leq c(F_2, \psi) \quad \forall \psi \in E^n}.$$

Замечание 5.2. В силу [свойства 2](#) опорных функций условие $c(F_1, \psi) \leq c(F_2, \psi) \quad \forall \psi \in E^n$ равносильно условию $c(F_1, \psi) \leq c(F_2, \psi) \quad \forall \psi \in S$. Аналогичное замечание относится и к свойствам 11-14, приведенным ниже, и их следствиям.

Свойство 12

Пусть $f \in E^n, F \in \Omega(E^n)$. Тогда

$$\boxed{f \in F} \Rightarrow \boxed{(f, \psi) \leq c(F, \psi) \quad \forall \psi \in E^n} \Rightarrow \boxed{f \in \text{conv } F}.$$

Доказательство

Свойство 12 вытекает из свойства 11 при $F_1 = \{f\}, F_2 = F$.

Следствие Для $F \in \text{conv } \Omega(E^n)$

$$\boxed{f \in F} \Leftrightarrow \boxed{(f, \psi) \leq c(F, \psi) \quad \forall \psi \in E^n}.$$

Свойство 13

Пусть $0 \in E^n, F \in \Omega(E^n)$. Тогда

$$\boxed{0 \in F} \Rightarrow \boxed{0 \leq c(F, \psi) \quad \forall \psi \in E^n} \Rightarrow \boxed{0 \in \text{conv } F}.$$

Доказательство

Свойство 13 вытекает из свойства 12 при $f = 0$.

Следствие Для $F \in \text{conv } \Omega(E^n)$

$$\boxed{0 \in F} \Leftrightarrow \boxed{0 \leq c(F, \psi) \quad \forall \psi \in E^n}.$$

Чрезвычайно важную роль в дальнейшем (при исследовании вопроса об управляемости и доказательстве принципа максимума) играет следующее свойство опорных функций.

Свойство 14

Пусть $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$. Тогда

$$\boxed{F_1 \cap F_2 \neq \emptyset} \Rightarrow \boxed{c(F_1, \psi) + c(F_2, -\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in E^n} \Rightarrow \boxed{(\text{conv } F_1) \cap (\text{conv } F_2) \neq \emptyset}.$$

Знаком \emptyset здесь обозначено пустое множество.

Доказательство

Докажем сначала первую импликацию. Условие $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ (непустота пересечения множеств F_1 и F_2) означает существование хотя бы одной общей точки у этих множеств: $\exists f \in E^n, f \in F_1, f \in F_2$. Тогда $(-f) \in (-F_2)$ и, в силу определения алгебраической суммы двух множеств, получаем: $f + (-f) \in F_1 + (-F_2)$, т.е. $0 \in F_1 + (-F_2)$. Первая часть свойства 13 влечет неравенство

$$c(F_1 + (-F_2), \psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in E^n,$$

которое в силу [свойства 7](#) принимает вид:

$$c(F_1, \psi) + c(-F_2, \psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in E^n,$$

и, наконец, с помощью [свойства 5](#), окончательную форму:

$$c(F_1, \psi) + c(F_2, -\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in E^n. \quad (15)$$

Докажем теперь вторую импликацию свойства 14. Пусть выполнено неравенство (15). Полагая $H_1 = \text{conv } F_1, H_2 = \text{conv } F_2$, и, привлекая [свойство 10](#), из неравенства (15) получаем

$$c(H_1, \psi) + c(-H_2, \psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in E^n.$$

Отсюда с помощью [свойств 5 и 7](#) приходим к неравенству

$$c(H_1 + (-H_2), \psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in E^n. \quad (16)$$

Так как $H_1, H_2 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n)$, то $H_1 + (-H_2) \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n)$. Поэтому в силу следствия из свойства 13 неравенство (16) равносильно условию $0 \in H_1 + (-H_2)$, из которого следует, что $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, т.е.

$$(\text{conv } F_1) \cap (\text{conv } F_2) \neq \emptyset.$$

Следствие Для $F_1, F_2 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n)$

$$F_1 \cap F_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow c(F_1, \psi) + c(F_2, -\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^n$$

Покажем на примере, что последнее утверждение для невыпуклых компактов неверно. Пусть $F_1 = S_\varepsilon(0)$, $0 < \varepsilon < 1$; $F_2 = S$, тогда

$$c(F_1, \psi) + c(F_2, -\psi) = \varepsilon \|\psi\| + \|\psi\| = (1 + \varepsilon) \|\psi\| \geq 0, \quad F_1 \cap F_2 = \emptyset$$

(шар радиуса ε с центром в нуле не пересекается с единичной сферой S).

5.6. Расстояние Хаусдорфа между множествами. Свойства 15, 16 опорной функции, связанные с расстоянием Хаусдорфа

Рассмотрим точку $x_0 \in \mathbb{E}^n$ и число $\varepsilon \geq 0$. ε -окрестностью точки x_0 называется шар $S_\varepsilon(x_0) = \{x_0\} + S_\varepsilon(0)$. Напомним, что $S_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$. Пусть $r = \|x_0 - y_0\|$ – расстояние между двумя точками $x_0, y_0 \in \mathbb{E}^n$; тогда соотношения

- $x_0 \in \{y_0\} + S_\varepsilon(0)$,
- $y_0 \in \{x_0\} + S_\varepsilon(0)$,

выполняются для любого числа $\varepsilon \geq r$. причём

$$r = \min\{\varepsilon \geq 0 : x_0 \in \{y_0\} + S_\varepsilon(0), y_0 \in \{x_0\} + S_\varepsilon(0)\}.$$

Определение 5.2. ε -окрестностью множества $F \subset \mathbb{E}^n$ называется множество

$$F + S_\varepsilon(0) = \bigcup_{f \in F} S_\varepsilon(f).$$

Рассмотрим пример. Пусть $F = \{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$ – квадрат, его ε -окрестность изображена на рис. 5.4.

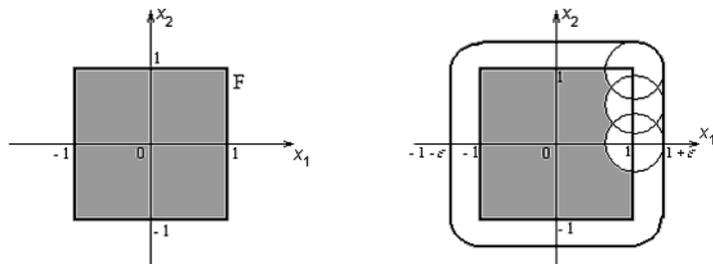


Рисунок 5.4.

Определение ε -окрестности множества F как объединения шаров $S_\varepsilon(f)$ по всем точкам $f \in F$ позволяет в плоском случае дать "механическое" описание процедуры построения ε -окрестности: если считать круг $S_\varepsilon(f)$ покрытым краской, то ε -окрестность множества F состоит из всех окрашенных точек плоскости, когда центр f этого круга пробегает все множество F .

Обратимся к определению расстояния между множествами. Рассмотрим в \mathbb{E}^n два ограниченных множества F_1, F_2 ; ясно, что существует такое число $R > 0$, что

$$F_1 \subset F_2 + S_R(0), \quad F_2 \subset F_1 + S_R(0).$$

Таких чисел R существует много, и можно поставить вопрос о выборе "наименьшего" из таких чисел, для которых оба записанные включения выполняются. На этом пути приходим к определению расстояния между множествами (расстояния Хаусдорфа).

Определение 5.3. Пусть $F_1, F_2 \in \Omega(\mathbb{E}^n)$. Расстоянием Хаусдорфа между множествами F_1 и F_2 называется неотрицательное число $h(F_1, F_2)$, определяемое формулой

$$h(F_1, F_2) = \min_{r \geq 0} \{r : F_1 \subset F_2 + S_r(0), F_2 \subset F_1 + S_r(0)\}. \quad (17)$$

Расстояние Хаусдорфа $h(F_1, F_2)$ определено для любых множеств $F_1, F_2 \in \Omega(\mathbb{E}^n)$.

Упражнение 5.4. Проверить, что расстояние $h(F_1, F_2)$ удовлетворяет трём аксиомам метрики метрического пространства:

- $h(F_1, F_2) \geq 0$; $h(F_1, F_2) = 0 \Leftrightarrow F_1 = F_2$;
- $h(F_1, F_2) = h(F_2, F_1)$ (симметричность);
- $h(F_1, F_3) \leq h(F_1, F_2) + h(F_2, F_3) \quad \forall F_1, F_2, F_3 \in \Omega(\mathbb{E}^n)$ (неравенство треугольника).

Упражнение 5.5. Установить для модуля $|F| = \max_{f \in F} \|f\|$ множества $F \in \Omega(\mathbb{E}^n)$ формулу

$$|F| = h(\{0\}, F).$$

Найдём расстояние Хаусдорфа между кругом $F_1 = S_1(0)$ и квадратом $F_2 = \{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$ на плоскости. Очевидно, что $F_1 \subset F_2 + S_r(0)$ для любого $r \geq 0$, так как $F_1 \subset F_2$. Далее, $F_2 \subset F_1 + S_r(0)$ для любого $r \geq \sqrt{2} - 1$, так как $F_1 + S_r(0) = S_{1+r}(0)$, и минимальное значение r , для которого выполняется включение $F_2 \subset S_{1+r}(0)$, равно $\sqrt{2} - 1$. Следовательно,

$$h(F_1, F_2) = \sqrt{2} - 1.$$

Замечание 5.3. Расстояние Хаусдорфа можно определить для любых множеств из \mathbb{E}^n , заменив в формуле (17) знак \min знаком \inf .

Пример 5.5. Пусть $F_1 = S_1(0)$ (замкнутый круг) и $F_2 = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ (открытый круг). Покажем, что $h(F_1, F_2) = 0$. Действительно, $F_2 \subset F_1 + S_r(0)$ при любом $r \geq 0$, так как $F_2 \subset F_1$. Включение $F_1 \subset F_2 + S_r(0)$ выполняется при любом $r > 0$. Поэтому

$$h(F_1, F_2) = \inf_{r \geq 0} \{r : F_1 \subset F_2 + S_r(0), F_2 \subset F_1 + S_r(0)\} = 0.$$

Пример 5.6. Пусть $F_1 = \{x_2 = 0\}$ (прямая) и $F_2 = \{x_2 = \arctg x_1\}$ (график арктангенса). Эти множества замкнуты, но не ограничены,

$$h(F_1, F_2) = \frac{\pi}{2}.$$

Рассмотрим в заключение два свойства опорных функций, связанных с расстоянием Хаусдорфа.

Свойство 15 (условие Липшица по первому аргументу)

$$|c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi)| \leq \|\psi\| h(F_1, F_2) \quad \forall F_1, F_2 \in \Omega(\mathbb{E}^n). \quad (18)$$

Здесь множитель $\|\psi\|$ играет роль константы Липшица.

Доказательство

Из определения расстояния Хаусдорфа следует включение $F_1 \subset F_2 + S_{h(F_1, F_2)}(0)$. Отсюда, привлекая [свойство 11](#) (часть 1), [свойство 7](#) и [пример 2](#) из п.5.4, получаем:

$$c(F_1, \psi) \leq c(F_2 + S_{h(F_1, F_2)}(0), \psi) = c(F_2, \psi) + \|\psi\| h(F_1, F_2),$$

т.е.

$$c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi) \leq \|\psi\| h(F_1, F_2).$$

Если поменять ролями множества F_1 и F_2 , то, в силу симметрии расстояния Хаусдорфа, получим неравенство

$$c(F_2, \psi) - c(F_1, \psi) \leq \|\psi\| h(F_1, F_2).$$

Из двух последних неравенств следует неравенство (18).

Следствие Опорная функция $c(F, \psi)$ непрерывна по первому аргументу, т.е. $c(F', \psi) \rightarrow c(F, \psi)$, $h(F, F') \rightarrow 0$. Здесь $F', F \in \Omega(\mathbb{E}^n), \psi \in \mathbb{E}^n$.

Следствие Опорная функция $c(F, \psi)$ непрерывна по совокупности аргументов, т.е. $c(F', \psi') \rightarrow c(F, \psi)$ при $h(F, F') + \|\psi' - \psi\| \rightarrow 0$. Здесь $F', F \in \Omega(\mathbb{E}^n), \psi', \psi \in \mathbb{E}^n$.

Упражнение 5.6. Доказать последнее утверждение.

Свойство 16 (вычисление расстояния Хаусдорфа между выпуклыми компактными множествами при помощи опорных функций этих компактов)

Пусть $F_1, F_2 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n)$. Тогда имеет место формула

$$h(F_1, F_2) = \max_{\psi \in S^1} |c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi)|. \quad (19)$$

Доказательство

Полагая $M = \max_{\psi \in S} |c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi)|$, перепишем (19) в форме

$$h(F_1, F_2) = M. \quad (20)$$

Докажем сначала, что

$$h(F_1, F_2) \geq M. \quad (21)$$

Из свойства 15 следует неравенство

$$|c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi)| \leq h(F_1, F_2) \quad \forall \psi \in S,$$

которое в силу определения числа M влечет (21).

Докажем теперь, что

$$h(F_1, F_2) \leq M. \quad (22)$$

Из определения числа M следует, что

$$|c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi)| \leq M \quad \forall \psi \in S,$$

или

$$|c(F_1, \frac{\psi}{\|\psi\|}) - c(F_2, \frac{\psi}{\|\psi\|})| \leq h(F_1, F_2) \quad \forall \psi \in E^n, \psi \neq 0.$$

Умножив почленно последнее неравенство на $\|\psi\|$ и привлекая [свойство 2](#), получаем

$$|c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi)| \leq M \|\psi\| \quad \forall \psi \in E^n,$$

или

$$-M \|\psi\| \leq c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi) \leq M \|\psi\| \quad \forall \psi \in E^n. \quad (23)$$

Используя правую часть последнего неравенства, [свойство 7](#), получаем

$$c(F_1, \psi) \leq c(F_2, \psi) + c(S_M(0), \psi) = c(F_2 + S_M(0), \psi) \quad \forall \psi \in E^n.$$

Так как компакты F_1 и $F_2 + S_M(0)$ выпуклы, то по [следствию из свойства 11](#) опорных функций последнее соотношение влечёт включение

$$F_1 \subset F_2 + S_M(0). \quad (24)$$

Левая часть неравенства (23) при помощи аналогичных рассуждений приводит к включению

$$F_2 \subset F_1 + S_M(0). \quad (25)$$

Итак, для числа M одновременно выполняются включения (24) и (25), и определение расстояния Хаусдорфа (17) приводит к обоснованию неравенства (22). Из (21) и (22) вытекает требуемое равенство (20).

Замечание 5.4. Формула (19) доказана для выпуклых компактов. Приведем пример, показывающий, что без условия выпуклости эта формула неверна. Пусть $n = 2$,

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

– множества, каждое из которых состоит из двух точек. Ясно, что включения

$$F_2 \subset F_1 + S_r(0), F_1 \subset F_2 + S_r(0)$$

выполняются лишь при $r \geq \sqrt{2}$, поэтому $h(F_1, F_2) = \sqrt{2}$. С другой стороны,

$$M = \max_{\psi \in S} |c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi)| = \max_{\psi_1^2 + \psi_2^2 = 1} |\psi_1| - |\psi_2| = 1.$$

Таким образом, $h(F_1, F_2) = \sqrt{2} > 1 = M$. т.е. формула (19) для рассматриваемых невыпуклых компактов F_1 и F_2 неверна.

В заключение рассмотрим пример применения формулы (19) для нахождения расстояния между двумя шарами $S_{r_1}(a_1)$ и $S_{r_2}(a_2)$; $a_1, a_2 \in \mathbb{E}^n$, $r_1, r_2 \geq 0$. Имеем:

$$h(S_{r_1}(a_1), S_{r_2}(a_2)) = \max_{\psi \in S^1} |c(S_{r_1}(a_1), \psi) - c(S_{r_2}(a_2), \psi)| = \\ = \max_{\|\psi\|=1} |(a_1 - a_2, \psi) + (r_1 - r_2) \|\psi\| | = \|a_1 - a_2\| + |r_1 - r_2|.$$

Мы закончили рассмотрение основных свойств опорных функций, которые являются удобным аналитическим аппаратом для описания выпуклых компактов.

Лекция 6

§ 6. Интегралы. Три теоремы об интегралах

[Теорема 6.1](#) – о внесении знака опорной функции под знак интеграла, [Теорема 6.2](#) – об основных свойствах интеграла, [Теорема 6.3](#) – о непрерывной зависимости интеграла от верхнего предела интегрирования

6.1. Краткое введение

Мы уже знакомы с постановкой линейной задачи быстрогодействия, компактная запись которой имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u, \\ x(t_0) \in M_0, \\ x(t_1) \in M_1, \\ t_1 - t_0 \rightarrow \min. \end{cases} \quad (1)$$

Постановка линейной задачи быстрогодействия требует задания следующего набора исходных данных $(A, M_0, M_1, \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_U)$, где A – матрица системы, M_0 – множество начальных состояний объекта, M_1 – множество конечных состояний объекта, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_U$ – класс допустимых управлений, U – область управления. Напомним, что начальный момент времени t_0 считается фиксированным. Класс допустимых управлений

$$\mathcal{Y} = \left\{ u(s) \mid \begin{array}{l} 1) \quad \forall s: u(s) \in U \\ 2) \quad u(s) \text{ интегрируемая функция} \end{array} \right\}$$

состоит из векторных функций $u(s)$ скалярного аргумента s , принимающих значения из заданного множества $U \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, причём каждая из этих функций $u(s)$ интегрируема. При изучении задачи быстрогодействия (1) важную роль играет множество достижимости $X(t_0, t, M_0) = X(t)$, которое может быть представлено в форме

$$\begin{aligned} X(t_0, t, M_0) &= e^{(t-t_0)A} M_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} \mathcal{Y} ds, \quad t_0 < t; \\ X(t_0, t_0, M_0) &= M_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Множество $X(t)$, как показывает правая часть равенства (2), является алгебраической суммой двух множеств. На основании [свойства 7](#) опорных функций (аддитивность по первому аргументу) опорную функцию множества достижимости $X(t)$ можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$c(X(t), \mathcal{Y}) = c(e^{(t-t_0)A} M_0, \mathcal{Y}) + c\left(\int_{t_0}^t e^{(t-s)A} \mathcal{Y} ds, \mathcal{Y}\right). \quad (3)$$

Последнее слагаемое в формуле (3) представляет собой опорную функцию от множества, определяемого интегралом. Возникает вопрос о том, как опорная функция интеграла выражается через опорную функцию компакта U , входящего в описание класса $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_U$ допустимых управлений. Ответ на поставленный вопрос даёт рассмотренная ниже теорема 6.1. Теоремы 6.2 и 6.3 дают описание некоторых свойств интеграла.

Напомним определение интеграла

$$\int_{t_0}^t D(s) \mathcal{Y} ds \quad (4)$$

от класса допустимых управлений.

Определение 6.1. Пусть $D(s)$ – непрерывная $(n \times n)$ -матрица; $t_0 < t$; интеграл (4) определяется равенством

$$\int_{t_0}^t D(s) \mathcal{Y} ds = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \int_{t_0}^t D(s) u(s) ds, u(s) \in \mathcal{Y} \right\} = \bigcup_{u(s) \in \mathcal{Y}} \left\{ \int_{t_0}^t D(s) u(s) ds \right\}.$$

Интеграл (4) является множеством, лежащим в пространстве \mathbb{R}^n .

Упражнение 6.1. Пусть $n = 1$, $D(s) = 1$, $t_0 = 0$, $0 < t$, $U = [-1, 1]$. Показать, что

$$\int_0^t 1 \cdot \mathcal{Y} ds = [-t, t], \quad \int_0^2 1 \cdot \mathcal{Y} ds = [-2, 2].$$

6.2. Теорема 6.1 (о внесении знака опорной функции под знак интеграла).

Теорема 6.1.

Пусть

- $U \in \Omega(\mathbb{E}^n)$,
- $D(s)$ — непрерывная $(n \times n)$ -матрица,
- $\mathcal{Y} = \{u(s) \mid 1) \forall s: u(s) \in U, 2) u(s) \text{ — интегрируемая функция}\}$ — класс допустимых управлений.

Рассмотрим множество

$$X = \int_{t_0}^t D(s) \mathcal{Y} ds, \quad t_0 < t. \quad (5)$$

Тогда имеет место равенство:

$$c \left(\int_{t_0}^t D(s) \mathcal{Y} ds, \psi \right) = \int_{t_0}^t c(D(s)U, \psi) ds, \quad \psi \in \mathbb{E}^n. \quad (6)$$

Доказательство

? Введем обозначения:

$a = c(X, \psi)$ — левая часть равенства (6).

$b = \int_{t_0}^t c(D(s)U, \psi) ds$ — правая часть равенства (6).

Тогда утверждение теоремы 6.1 кратко запишется в форме

$$a = b. \quad (7)$$

Доказательство теоремы 6.1 проводится по следующей схеме:

1. $\exists a$
 2. $\exists b$
 3. $a \leq b$
 4. $a \geq b$
- $\left. \begin{array}{l} 3. \\ 4. \end{array} \right\} \Rightarrow a = b$

Приведем сначала некоторые вспомогательные утверждения (леммы 6.1, 6.2).

Лемма 6.1.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ — $(n \times n)$ -матрица, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор из \mathbb{E}^n . Справедливо неравенство

$$\|Ax\| \leq \|x\| \sqrt{\sum_{j=1}^n (a_j^j)^2}. \quad (8)$$

Доказательство

Действительно, пусть $a^i = (a_1^i \dots a_n^i)$ — i -ая строка матрицы A . Тогда

$$\|Ax\| = \sqrt{(a^1, x)^2 + \dots + (a^n, x)^2} \leq \sqrt{\|a^1\|^2 \|x\|^2 + \dots + \|a^n\|^2 \|x\|^2} =$$

$$= \|x\| \sqrt{\|a^1\|^2 + \dots + \|a^n\|^2} = \|x\| \sqrt{\sum_{j=1}^n (a_j^j)^2}.$$

т.к. $A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \dots \\ a^n \end{pmatrix}$, $Ax = \begin{pmatrix} (a^1, x) \\ \dots \\ (a^n, x) \end{pmatrix}$, что доказывает лемму 6.1.

Рассмотрим теперь квадратную матрицу порядка n

$$D(s) = \begin{pmatrix} d_1^1(s) & \dots & d_n^1(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ d_1^n(s) & \dots & d_n^n(s) \end{pmatrix},$$

непрерывно зависящую от $s \in [t_0, t]$; каждый ее элемент $d_j^i(s)$ является непрерывной функцией аргумента $s \in [t_0, t]$. Положим,

$$\omega_j^i(\delta) = \sup_{|s_1 - s_2| \leq \delta, s_1, s_2 \in [t_0, t]} |d_j^i(s_1) - d_j^i(s_2)|, \quad i, j = 1, \dots, n; \delta > 0.$$

Функция $\omega_j^i(\delta)$ аргумента $\delta > 0$, называемая *модулем непрерывности* функции $d_j^i(s)$, удовлетворяет условию $\omega_j^i(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$ (это следует из равномерной непрерывности на отрезке $[t_0, t]$ функции $d_j^i(s)$, которая предполагается непрерывной на этом отрезке). Положим

$$\omega(\delta) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n [\omega_j^i(\delta)]^2}.$$

Ясно, что $\omega(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$.

Лемма 6.2.

Пусть $s_1, s_2 \in [t_0, t], \delta > 0; |s_1 - s_2| \leq \delta; \psi \in E^n, u \in U$. Имеют место неравенства

$$|c(D(s_1)U, \psi) - c(D(s_2)U, \psi)| \leq |U| \cdot \|\psi\| \cdot \omega(|s_1 - s_2|) \leq |U| \cdot \|\psi\| \cdot \omega(\delta), \quad (9)$$

$$|(D(s_1)u, \psi) - (D(s_2)u, \psi)| \leq |U| \cdot \|\psi\| \cdot \omega(|s_1 - s_2|) \leq |U| \cdot \|\psi\| \cdot \omega(\delta), \quad (10)$$

правая часть которых стремится к нулю при $\delta \rightarrow +0$.

Доказательство

Действительно, привлекая свойства опорных функций, последовательно получаем

$$\begin{aligned} |c(D(s_1)U, \psi) - c(D(s_2)U, \psi)| &= \{ \text{свойство 5, пар. 5} \} \\ &= |c(U, D^*(s_1)\psi) - c(U, D^*(s_2)\psi)| \leq \left\{ \begin{array}{l} \text{свойство 4 §5} \\ |U| \cdot \max_{\psi} \|\psi\| \cdot \text{модуль компакта} \end{array} \right\} \\ &\leq |U| \cdot \| [D(s_1) - D(s_2)]^* \psi \| \leq \{ \text{лемма 6.1.} \} \\ &\leq |U| \cdot \|\psi\| \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^n [d_j^i(s_1) - d_j^i(s_2)]^2} \leq \{ \text{определение функции } \omega(\delta) \} \end{aligned}$$

Неравенство (9) доказано. Неравенство (10) доказывается аналогично:

$$\begin{aligned} |(D(s_1)u, \psi) - (D(s_2)u, \psi)| &= \\ &= |(u, [D(s_1) - D(s_2)]^* \psi)| \leq \\ &\leq \|u\| \cdot \| [D(s_1) - D(s_2)]^* \psi \| \leq \\ &\leq |U| \cdot \|\psi\| \cdot \omega(|s_1 - s_2|) \leq \\ &\leq |U| \cdot \|\psi\| \cdot \omega(\delta). \end{aligned}$$

Обратимся теперь к доказательству теоремы 6.1 по указанной выше схеме 1), 2), 3), 4).

1) Эа. Чтобы проверить утверждение 1) для величины $\alpha = c(X, \psi)$ (при любом фиксированном векторе $\psi \in E^n$), мы покажем, что множество X непусто и ограничено.

Проверим сначала, что $X \neq \emptyset$. Множество

$$X = \int_{t_0}^t D(s)Y ds = \left\{ x \in E^n : x = \int_{t_0}^t D(s)u(s) ds, u(s) \in Y \right\}$$

непусто, так как множество U непусто и существует точка $u_* \in U$; управление $u_*(s) \equiv u_* \forall s$ является допустимым ($(u_*(s)) \in Y$) и

$$\text{точка } x_* \equiv \int_{t_0}^t D(s)u_*(s) ds \in X.$$

Для доказательства ограниченности множества X возьмем любую точку $x \in X$. Точку x можно представить в форме

$$x = \int_{t_0}^t D(s)u(s) ds \in X, \quad \text{где } u(s) \in Y, u(s) \in U \text{ при любом } s \in [t_0, t]. \text{ Следовательно,}$$

$$\|x\| \leq \int_{t_0}^t \|D(s)u(s)\| ds \leq \{ \text{лемма 6.1} \} \leq \int_{t_0}^t \|u(s)\| \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^n (d_j^i(s))^2} ds \leq R.$$

где $R = (t - t_0) |U| \max_{s \in [t_0, t]} \sqrt{\sum_{j=1}^n (d_j^i(s))^2}$.

Таким образом, $\exists R > 0: X \subset S_R(0)$.

Ограниченность множества X доказана.

Следовательно, при каждом $\psi \in E^n$ величина $a = c(X, \psi)$ определена и принимает конечное значение. Утверждение 1) доказано.

2) $\exists b$. Чтобы проверить утверждение 2) для величины

$$b = \int_{t_0}^t c(D(s)U, \psi) ds$$

(при любом фиксированном векторе $\psi \in E^n$), перепишем последнюю формулу в виде

$$b = \int_{t_0}^t c(U, D^*(s)\psi) ds. \quad (11)$$

Существование интеграла (11) следует из непрерывности подынтегральной функции по переменной интегрирования $s \in [t_0, t]$. Непрерывность подынтегральной функции по s вытекает из непрерывности опорной функции по второму аргументу, непрерывности $D^*(s)\psi$ по s и теоремы о непрерывности суперпозиции двух непрерывных функций. Заметим, что непрерывность функции $c(D(s)U, \psi)$ по s следует также из неравенства (9). Проверка утверждения 2) закончена.

3) $a \leq b$. Любая точка $x \in X = \int_{t_0}^t D(s)Y ds$ допускает представление

$$x = \int_{t_0}^t D(s)u(s) ds, \quad u(s) \in Y.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (x, \psi) &= \left(\int_{t_0}^t D(s)u(s) ds, \psi \right) = \int_{t_0}^t (D(s)u(s), \psi) ds = \\ &= \int_{t_0}^t (u(s), D^*(s)\psi) ds \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t c(U, D^*(s)\psi) ds = \\ &= \int_{t_0}^t c(D(s)U, \psi) ds \equiv b. \end{aligned}$$

См. определение [опорной функции](#) и [свойство 5, пар.5](#)

Итак, $(x, \psi) \leq b \quad \forall x \in X$. Следовательно, $\forall \psi \in E^n$

$$a \equiv c(X, \psi) = \sup_{x \in X} (x, \psi) \leq b.$$

Утверждение 3) доказано.

Проведем теперь наиболее трудную часть доказательства теоремы 6.1 – проверку утверждения

4)

$$a \geq b. \quad (12)$$

Неравенство (12) вытекает из следующей леммы 6.3.

Лемма 6.3.

Для любого натурального N имеет место неравенство

$$a \geq b - \varepsilon_N. \quad (13)$$

где $\varepsilon_N > 0, \varepsilon_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Лемма 6.4.

Для любого натурального N

$$\exists x_N \in X : (x_N, \Psi) \geq b - \varepsilon_N, \quad (14)$$

где $\varepsilon_N > 0, \varepsilon_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Очевидно, что

лемма 6.4 \Rightarrow лемма 6.3 \Rightarrow неравенство (12).

Действительно,

$$a = c(X, \Psi) = \sup_{x \in X} (x, \Psi) \geq (x_N, \Psi) \geq b - \varepsilon_N,$$

т.е. $a \geq b - \varepsilon_N \forall N$, и переход к пределу при $N \rightarrow \infty$ в последнем неравенстве (a и b от N не зависят, а $\varepsilon_N \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$) приводит к интересующему нас неравенству (12). Таким образом, для доказательства (12) остаётся установить утверждение леммы 6.4.

Лемма 6.5.

Имеет место утверждение леммы 6.4, причем в (14) точка x_N допускает представление

$$\int_{t_0}^t D(s) u_N(s) ds, \quad (15)$$

где $u_N(s)$ – кусочно–постоянное допустимое управление ($u_N(s) \in \mathcal{U}$), а число ε_N определяется равенством

$$\varepsilon_N = 2(t - t_0) \cdot \|U\| \cdot \|\Psi\| \cdot \omega\left(\frac{t - t_0}{N}\right), \quad (16)$$

причём при $N \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_N \rightarrow 0. \quad (17)$$

Доказательство

леммы 6.5, которое мы сейчас проведём, состоит из двух частей:

(α) построение управления $u_N(s), t_0 \leq s \leq t$;

(β) проверка требуемых утверждений (14)–(17).

(α) Опишем сначала построение управления $u_N(s)$. Пусть N – натуральное число; разобьём отрезок $[t_0, t]$ на N равных частей точками

$$t_0 \equiv t^0 < t^1 < \dots < t^N \equiv t,$$

где $t^{j+1} - t^j = \frac{t - t_0}{N} \equiv \delta > 0, \delta = \delta_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ (рис. 6.1).

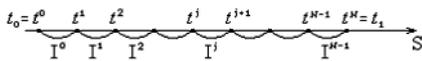


Рисунок 6.1.

Определим множества $I^0 = [t^0, t^1], I^1 = [t^1, t^2], \dots, I^j = [t^j, t^{j+1}], \dots, I^{N-1} = [t^{N-1}, t^N]$. Напомним, что число b определяется интегралом, стоящим в правой части формулы (6). Подынтегральная функция этого интеграла при $s = t^j, j = 0, 1, \dots, N-1$, представима в форме

$$c(D(t^j)U, \Psi) = (D(t^j)u^j, \Psi), \quad \text{где } u^j \in U. \quad (18)$$

Действительно, так как $U \in \Omega(E^x)$, то

$$c(D(t^j)U, \Psi) = c(U, D^*(t^j)\Psi) = \max_{u \in U} (u, D^*(t^j)\Psi) = (u^j, D^*(t^j)\Psi) = (D(t^j)u^j, \Psi), \quad u^j \in U.$$

Привлекая выделенные выше точки u^j , определим кусочно–постоянное управление $u_N(s), s \in [t_0, t]$:

$$u_N(s) = \begin{cases} u^0, s \in I^0, \\ u^1, s \in I^1, \\ \dots \\ u^j, s \in I^j, \\ \dots \\ u^{N-1}, s \in I^{N-1}. \end{cases} \quad (19)$$

Ясно, что построенное управление $u_N(s) \in \mathcal{U}$, так как функция $u_N(s)$ – интегрируема и принимает значения из компакта U при любом $s \in [t_0, t]$.

(β) Проверим утверждения (14)-(17). Так как управление (18) допустимо, то точка x , определяемая равенствами (15), (19) принадлежит множеству X . Представим левую часть неравенства (14) в форме

$$(x_N, \psi) = (15) = \left(\int_{t_0}^t D(s)u_N(s)ds, \psi \right) = \int_{t_0}^t (D(s)u_N(s), \psi)ds = (19) = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{I^j} (D(s)u^j, \psi)ds,$$

а число b , входящее в правую часть неравенства (14), в форме

$$b = \int_{t_0}^t c(D(s)U, \psi)ds = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{I^j} c(D(s)U, \psi)ds. \quad (21)$$

Из (20), (21) получаем вычитанием:

$$(x_N, \psi) - b = \sum_{j=0}^{N-1} R_j, \quad (22)$$

$$\text{где } R_j = \int_{I^j} [(D(s)u^j, \psi) - c(D(s)U, \psi)]ds.$$

Оценим сверху величину $|R_j|$. Привлекая (22), (18), получаем

$$\begin{aligned} R_j &= \int_{I^j} [(D(s)u^j, \psi) - (D(t^j)u^j, \psi) + \\ &+ \underbrace{(D(t^j)u^j, \psi) - c(D(t^j)U, \psi)}_{=0 \text{ по (18)}} + \\ &+ c(D(t^j)U, \psi) - c(D(s)U, \psi)]ds, \end{aligned}$$

откуда с помощью [леммы 6.2](#) приходим к оценке

$$|R_j| \leq 2(t^{j+1} - t^j) \cdot |U| \cdot \|\psi\| \cdot \omega(t^{j+1} - t^j).$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{N-1} |R_j| \leq 2N\delta \cdot |U| \cdot \|\psi\| \cdot \omega(\delta) = 2(t - t_0) \cdot |U| \cdot \|\psi\| \cdot \omega\left(\frac{t - t_0}{N}\right) \equiv \varepsilon_N, \quad (23)$$

причём $\varepsilon_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, так как $\omega(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Таким образом, из (23), (22) получаем, что $|(x_N, \psi) - b| \leq \varepsilon_N$, или

$$-\varepsilon_N \leq (x_N, \psi) - b \leq \varepsilon_N.$$

Левая часть последнего неравенства приводит к неравенству (14). Лемма 6.5 доказана полностью, неравенство (12) обосновано.

Доказательство теоремы 6.1 закончено.

6.3. Теорема 6.2 (об основных свойствах интеграла)

Теорема 6.2. (об основных свойствах интеграла)

Пусть $U \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, $D(s)$ – непрерывная $(n \times n)$ -матрица,

$$\text{класс допустимых управлений } \mathcal{U} = \left\{ \begin{array}{l} 1) \forall s: u(s) \in U, \\ 2) u(s) \text{ - интегрируемая по Лебегу функция} \end{array} \right\}$$

состоит из интегрируемых по Лебегу функций, принимающих значения из компакта U .

Тогда множество

$$X = \int_{\mathcal{U}} D(s)U ds \quad (\text{интеграл})$$

обладает следующими свойствами

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } X \text{ непусто,} \\ \text{б) } X \text{ ограничено,} \\ \text{в) } X \text{ замкнуто,} \\ \text{г) } X \text{ выпукло.} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} X \in \Omega(\mathbb{E}^n) \\ X \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n). \end{array} \right\}$$

Утверждения а), б) теоремы 6.2 легко проверяются (см. [доказательство теоремы 6.1](#)), утверждения в), г) приводятся без доказательства.

Замечание 6.1. В теореме 6.2 не предполагается выпуклости компакта U ; при этом интеграл X оказывается всегда выпуклым. Проиллюстрируем это обстоятельство примером.

Пример 6.1. Пусть $n=1$, $D(s)=1$, $U = \{-1, +1\}$ — множество, состоящее из двух точек -1 и $+1$ (U — невыпуклое множество).

Найти множество $X = \int_{\mathcal{U}} 1 \cdot U ds$.

Решение

Класс допустимых управлений \mathcal{U} содержит управления

$$u_0(s) \equiv -1, \quad u_1(s) \equiv +1, \quad u_\tau(s) = \begin{cases} +1, & 0 \leq s < \tau, \\ -1, & \tau < s \leq 1. \end{cases}$$

(кроме этих управлений в \mathcal{U} содержится много других управлений, которые, однако, для построения интеграла X не потребуются), а множество X (интеграл) содержит точки

$$x_0 = \int_{\mathcal{U}} 1 \cdot u_0(s) ds = -1, \quad x_1 = \int_{\mathcal{U}} 1 \cdot u_1(s) ds = +1, \quad x_\tau = \int_{\mathcal{U}} 1 \cdot u_\tau(s) ds = 2\tau - 1, \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Из рис. 6.2 ясно, что отрезок $[-1, +1] \subset X$, и так как для любой точки $x \in X$, представимой в форме $x = \int_{\mathcal{U}} u(s) ds, |u(s)|=1$ имеем

$$|x| = \left| \int_{\mathcal{U}} u(s) ds \right| \leq 1, \quad \text{то}$$

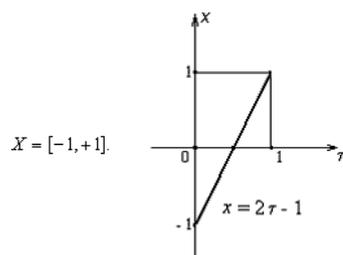


Рисунок 6.2.

Построенное в этом примере множество $X = [-1, +1]$ выпукло, хотя компакт $U = \{-1, +1\}$ выпуклым не является.

В примере 6.1 интеграл X был найден на основании определения интеграла. Нахождение интегралов на основании определения, требующее перебора всех допустимых управлений из \mathcal{U} , весьма неудобно для приложений. Здесь ситуацию можно сравнить с задачей вычисления интеграла Римана от функции действительного переменного: вычисление интеграла Римана на основании определения с помощью интегральных сумм в известном смысле неудобно для практики, и в ряде случаев интеграл удобно вычислять с помощью формулы Ньютона–Лейбница. Теоремы 6.1 и 6.2 позволяют находить интегралы от класса допустимых управлений по следующей схеме: сначала вычисляется опорная функция интеграла, а затем по опорной функции восстанавливается интеграл. Покажем, как эта схема применяется в конкретных задачах.

Пример 6.2. Пусть $n=2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D(s) = e^{-sA}$, $U = S_1(0)$. Найти интеграл $X = \int_{\mathcal{U}} D(s)U ds$.

Решение

В силу теоремы 6.2 множество $X(T)$ является выпуклым компактом. Найдём сначала его опорную функцию, привлекая теорему 6.1 о внесении знака опорной функции под знак интеграла:

$$c(X(T), \psi) = (\text{теорема 6.1.}) = \int_0^T c(e^{-sA}U, \psi) ds = \{ \text{свойство 5} \} = \\ = \int_0^T c(U, e^{-sA}\psi) ds = \int_0^T \|e^{-sA}\psi\| ds = \int_0^T \|\psi\| ds = T \|\psi\| = c(S_T(0), \psi).$$

Итак, два выпуклых компакта $X(T)$ и $S_T(0)$ имеют одинаковые опорные функции, отсюда, на основании свойства опорных функций, следует совпадение этих множеств:

$$X(T) = S_T(0),$$

т.е. интеграл $X(T)$ является кругом радиуса T с центром в начале координат.

Выше мы воспользовались равенством $\|e^{-sA}\psi\| = \|\psi\|$; геометрический смысл этого равенства состоит в том, что длина вектора при повороте его на угол s сохраняется. Для прямого доказательства этого равенства положим $\psi = \|\psi\| \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ и вычислим

$$e^{-sA}\psi = \|\psi\| \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \|\psi\| \begin{pmatrix} \cos(s-\alpha) \\ -\sin(s-\alpha) \end{pmatrix};$$

поэтому

$$\|e^{-sA}\psi\| = \|\psi\| \sqrt{\cos^2(s-\alpha) + \sin^2(s-\alpha)} = \|\psi\|.$$

Пример 6.3. Пусть $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = (-v, v), v \in \mathbb{E}^2$. Найти интеграл $X = \int_0^\pi e^{-sA}U ds$.

Решение

Действуя по той же схеме, получаем:

$$c(X, \psi) = \int_0^\pi c(U, e^{-sA}\psi) ds = \int_0^\pi |(v, e^{-sA}\psi)| ds,$$

так как $c((-v, v), \psi) = |(v, \psi)|$. Полагая

$$\psi = \|\psi\| \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, v = \|v\| \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix},$$

находим

$$e^{-sA}\psi = \|\psi\| \begin{pmatrix} \cos(s-\alpha) \\ -\sin(s-\alpha) \end{pmatrix}, (v, e^{-sA}\psi) = \|v\| \cdot \|\psi\| \cdot \cos(s-\alpha+\beta).$$

Следовательно,

$$c(X, \psi) = \|v\| \cdot \|\psi\| \cdot \int_0^\pi |\cos(s-\alpha+\beta)| ds = \|v\| \cdot \|\psi\| \cdot \int_0^\pi |\cos s| ds = 2\|v\| \cdot \|\psi\| = c(S_{2\|v\|}(0), \psi)$$

и

$$X = S_{2\|v\|}(0).$$

Заметим, что правая часть формулы (6), в отличие от примеров 6.2, 6.3, не всегда может быть найдена аналитически (на основе формулы Ньютона–Лейбница). В таких случаях интеграл в правой части формулы (6) может быть приближённо вычислен при фиксированном ψ методами численного интегрирования.

6.4. Теорема 6.3 (о непрерывной зависимости интеграла от верхнего предела)

Теорема 6.3. (о непрерывной зависимости интеграла от верхнего предела)

При выполнении условий [теоремы 6.2](#) множество

$$X(t) = \int_a^t D(s) \mathcal{U} ds$$

непрерывно зависит от аргумента t , т.е. Хаусдорфово расстояние $h(X(t'), X(t)) \rightarrow 0$ при $t' \rightarrow t$.

Доказательство

Действительно, в силу [теоремы 6.2](#) множества $X(t'), X(t)$ являются выпуклыми компактными и расстояние Хаусдорфа между ними можно выразить в терминах их опорных функций ([свойство 16](#) опорных функций). Опорные функции этих множеств можно найти с помощью [теоремы 6.1](#). Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} h(X(t'), X(t)) &= (\text{свойство 16} \cdot \beta 5) = \max_{\psi \in S^r} |c(X(t'), \psi) - c(X(t), \psi)| = (\text{теорема 6.1}) = \\ &= \max_{\psi \in S^r} \left| \int_a^t c(D(s) \mathcal{U}, \psi) ds \right| \leq \max_{\psi \in S^r} \left| \int_a^t |c(\mathcal{U}, D^*(s) \psi)| ds \right| \leq \max_{\psi \in S^r} |t - t'| \cdot \|\mathcal{U}\| \cdot \max_{|s-t| \leq \delta} \sqrt{\sum_{j=1}^n [d_j^i(s)]^2} \cdot \|\psi\| = \\ &= \text{const} \cdot |t' - t| \rightarrow 0 \text{ при } t' \rightarrow t. \end{aligned}$$

Итак, закончено изложение вспомогательного материала, который будет использоваться для изучения линейной задачи быстрого действия.

Лекция 7

§ 7. Постановка линейной задачи быстродействия

Рассмотрим линейную задачу быстродействия в E^n :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u, \\ x(t_0) \in M_0, \\ x(t_1) \in M_1, \\ t_1 - t_0 \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}. \end{cases}$$

Здесь x – вектор фазовых координат объекта, A – матрица системы, u – управление, M_0, M_1 – множества начальных и конечных состояний объекта; класс допустимых управлений $\mathcal{U} = \mathcal{U}_U = \{u(s) \mid 1) \forall s: u(s) \in U, 2) u(s) \text{ – интегрируемая функция}\}$

состоит из функций $u(s)$ скалярного аргумента s , принимающих значения из множества $U \in \Omega(E^n)$ и интегрируемых по Лебегу. Множество U называется областью управления. Начальный момент времени t_0 фиксирован.

Требуется найти допустимое управление, которое обеспечивает перевод объекта из множества M_0 в множество M_1 за минимальное время. Управление, решающее эту задачу, будем называть *оптимальным (по быстродействию)*.

Основные вопросы линейной теории быстродействия (управляемость, необходимые условия оптимальности, достаточные условия оптимальности, существование оптимального управления) рассмотрены ниже в §§10-15.

Напомним, что матрицу A мы считаем постоянной. Постановка линейной задачи быстродействия требует задания следующего набора исходных данных:

$$\{A, M_0, M_1, \mathcal{U} = \mathcal{U}_U, t_0\}.$$

§ 8. Основные свойства множества достижимости и множества управляемости

Эти множества введены в [§3](#), где мы установили следующее свойство.

Свойство 1 (представление множеств $X(t)$ и $Z(t)$ на основе формулы Коши)

$$X(t) \equiv X(t_0, t, M_0) = e^{(t-t_0)A} M_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} \mathcal{U} ds, \quad t_0 < t, \quad (1)$$

$$Z(t) \equiv Z(t, t_1, M_1) = e^{(t-t_1)A} M_1 + \int_t^{t_1} e^{(t-s)A} (-\mathcal{U}) ds, \quad t < t_1, \quad (2)$$

$$X(t_0) \equiv X(t_0, t_0, M_0) = M_0,$$

$$Z(t_1) \equiv Z(t_1, t_1, M_1) = M_1.$$

На формулах (1) и (2) основано изучение ряда простейших свойств множеств $X(t), Z(t)$, приведённых ниже.

Свойство 2 (опорная функция множеств $X(t)$ и $Z(t)$)

$$c(X(t), \psi) = c(e^{(t-t_0)A} M_0, \psi) + \int_{t_0}^t c(e^{(t-s)A} \mathcal{U}, \psi) ds, \quad (3)$$

$$c(Z(t), -\psi) = c(e^{(t-t_1)A} M_1, -\psi) + \int_t^{t_1} c(e^{(t-s)A} \mathcal{U}, \psi) ds. \quad (4)$$

Для получения формул (3), (4) следует использовать представление рассмотренных множеств в виде алгебраической суммы двух множеств (см. (1), (2), [свойство 7](#) аддитивности опорной функции по первому аргументу) (§ 5) и [теорему 6.1](#), § 6, о внесении знака опорной функции под знак интеграла. Используя [свойство 5, § 5](#), опорных функций, формулы (3), (4) можно записать в виде

$$c(X(t), \psi) = c(M_0, e^{(t-t_0)A} \psi) + \int_{t_0}^t c(U, e^{(t-s)A} \psi) ds, \quad (5)$$

$$c(Z(t), -\psi) = c(M_1, -e^{(t-t_1)A} \psi) + \int_t^{t_1} c(U, e^{(t-s)A} \psi) ds. \quad (6)$$

В правые части формул (5), (6) входят опорные функции множеств U, M_0, M_1 и матрица A , другими словами, опорные функции множеств достижимости и управляемости выражены в терминах исходных данных рассматриваемой линейной задачи быстрогодействия.

Свойство 3.

Если $M_0, M_1 \in \Omega(\mathbb{E}^n)$, то $X(t), Z(t) \in \Omega(\mathbb{E}^n)$;

если $M_0, M_1 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n)$, то $X(t), Z(t) \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n)$.

Действительно, множества $X(t)$ и $Z(t)$, в соответствии с формулами (1), (2), являются алгебраической суммой двух множеств. Вторые слагаемые (интегралы) по [теореме 6.2](#) являются выпуклыми компактами. Первые слагаемые, представляющие собой линейное преобразование компактов M_0, M_1 , являются компактами (проверить, что умножение матрицы на компакт даёт компакт; умножение матрицы на выпуклый компакт приводит к выпуклому компакт). Алгебраическая сумма двух компактов является компактом; алгебраическая сумма двух выпуклых компактов является выпуклым компактом. Эти соображения приводят к обоснованию свойства 3.

Замечание 8.1. Для одноточечных множеств M_0, M_1 множества $X(t), Z(t)$ являются выпуклыми компактами.

Свойство 4 (непрерывная зависимость множеств $X(t)$ и $Z(t)$ от времени t)

При $t' \rightarrow t$

$$h(X(t'), X(t)) \rightarrow 0, \quad h(Z(t'), Z(t)) \rightarrow 0.$$

Упражнение 8.1. Доказать свойство 4, привлекая формулы (1), (2) и [теорему 6.3](#), § 6.

§ 9. Сопряжённое уравнение. Сопряжённая переменная. Лемма о сопряжённой переменной

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = Ax + u(t), \quad x \in \mathbb{E}^n. \quad (1)$$

Уравнение

$$\dot{\psi} = -A^* \psi \quad (2)$$

называется *сопряжённым уравнением для уравнения (1)*. Здесь

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix},$$

– неизвестная n -мерная векторная функция аргумента t , A^* – матрица, полученная транспонированием из матрицы A , входящей в уравнение (1). Уравнение (2) является линейным однородным. Оно, очевидно, имеет тривиальное решение $\psi = 0$ (это решение нас не интересует). Решение сопряжённого уравнения можно записать с помощью формулы Коши:

$$\psi(t) = e^{-(t-t_0)A^*} \psi(t_0) \quad (3)$$

(вектор начальных условий задан в момент времени t_0). В силу невырожденности экспоненциала ([§ 2](#))

$$\psi(t) = 0 \quad \forall t \Leftrightarrow \psi(t_0) = 0,$$

т.е. тривиальное решение $\psi(t) = 0$ уравнения (2) получаем только при нулевом начальном условии $\psi(t_0) = 0$.

Определение 9.1. Любое нетривиальное решение $\psi(t)$ сопряжённого уравнения (2) будем называть *сопряжённой переменной*.

Для получения сопряжённой переменной $\psi(t)$ следует решить сопряжённое уравнение (2) с некоторым ненулевым начальным условием.

Если начальное условие задано в момент времени t_1 , то вместо формулы (3) получаем

$$\psi(t) = e^{-(t-t_1)A^*} \psi(t_1). \quad (4)$$

В дальнейшем изложении существенно используется следующая лемма.

Лемма (о сопряжённой переменной)

Пусть $t_0 < t_1$, $t \in [t_0, t_1]$, $X(t) \equiv X(t_0, t, M_0)$ – множество достижимости, $Z(t) \equiv Z(t, t_1, M_1)$ – множество управляемости. Для любой сопряжённой переменной $\psi(t)$ имеют место следующие равенства

$$c(X(t), \psi(t)) = c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^t c(U, \psi(s)) ds, \quad (5)$$

$$c(Z(t), -\psi(t)) = c(M_1, -\psi(t_1)) + \int_{t_1}^t c(U, \psi(s)) ds. \quad (6)$$

Кроме того,

$$(x(t), \psi(t)) = (x(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^t (u(s), \psi(s)) ds, \quad (7)$$

$$(x(t), -\psi(t)) = (x(t_1), -\psi(t_1)) + \int_{t_1}^t (u(s), \psi(s)) ds. \quad (8)$$

где $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$, т.е. в формулах (7), (8) $x(t)$ – любая траектория, отвечающая управлению $u(t)$.

Доказательство

Равенства (5) – (8) устанавливаются непосредственной проверкой.

Проверим сначала равенство (7). На основании формулы Коши

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} \left(x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)A} u(s) ds \right), \quad \psi(t) = e^{-(t-t_0)A^*} \psi(t_0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} (x(t), \psi(t)) &= (e^{(t-t_0)A} (x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)A} u(s) ds), e^{-(t-t_0)A^*} \psi(t_0)) = \\ &= (x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)A} u(s) ds, \psi(t_0)) = (x(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^t (u(s), \psi(s)) ds. \end{aligned}$$

Формула (7) доказана.

Проверим формулу (8). На основании формулы Коши

$$x(t) = e^{(t-t_1)A} \left(x(t_1) + \int_{t_1}^t e^{-(s-t_1)A} u(s) ds \right), \quad \psi(t) = e^{-(t-t_1)A^*} \psi(t_1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} (x(t), -\psi(t)) &= (e^{(t-t_1)A} (x(t_1) + \int_{t_1}^t e^{-(s-t_1)A} u(s) ds), -e^{-(t-t_1)A^*} \psi(t_1)) = \\ &= (x(t_1), \psi(t_1)) + \int_{t_1}^t (u(s), e^{-(s-t_1)A^*} \psi(t_1)) ds = (x(t_1), -\psi(t_1)) + \int_{t_1}^t (u(s), \psi(s)) ds. \end{aligned}$$

Формула (8) доказана.

Проверим теперь формулу (5). Используя формулы (5), § 8, и (3), § 9, имеем

$$c(X(t), \psi(t)) = c(X(t), \psi) |_{\psi=\psi(t)} = c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^t c(U, \psi(s)) ds.$$

Для доказательства формулы (6) следует воспользоваться формулами (6), § 8, и (4), § 9.

Лемма о сопряжённой переменной доказана.

Замечание 9.1. Опорная функция множества достижимости $X(t)$ на сопряжённой переменной $\psi(t)$, т.е. функция

$$f(t) \equiv c(X(t), \psi(t)) = c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^t c(U, \psi(s)) ds.$$

непрерывна по аргументу t вместе со своей производной

$$\dot{f}(t) = c(U, \psi(t)).$$

Опорная функция множества управляемости $Z(t)$ на сопряжённой переменной $\psi(t)$, т.е. функция

$$\phi(t) \equiv c(Z(t), -\psi(t)) = c(M_1, -\psi(t_1)) + \int_{t_1}^t c(U, \psi(s)) ds,$$

непрерывна по аргументу t вместе со своей производной

$$\dot{\phi}(t) = -c(U, \psi(t)).$$

Лекция 8

§ 10. Управляемость. Критерий управляемости. Основная лемма

В § 10 вводится понятие управляемости, рассматривается критерий управляемости. С помощью критерия управляемости доказывается так называемая основная лемма, которая будет использована при выводе необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина (§ 11).

Рассматривается управляемый объект, описываемый уравнением

$$\dot{x} = Ax + u.$$

Задан класс допустимых управлений $\mathcal{U} = \mathcal{U}_U$, множества M_0, M_1 ($U, M_0, M_1 \in \Omega(\mathbb{E}^n)$) и два числа $t_0, t_1; t_0 < t_1$. Поставим вопрос: можно ли при помощи какого-нибудь допустимого управления $u(s) \in \mathcal{U}$, определенного на отрезке времени $[t_0, t_1]$, перевести объект из множества M_0 на множество M_1 :

$$x(t_0) \in M_0, \quad x(t_1) \in M_1?$$

При положительном ответе на этот вопрос говорят об *управляемости* объекта. Исследование управляемости не связано с каким-либо критерием качества процесса управления (например, с временем перехода). Отрезок времени $[t_0, t_1]$ считается заданным.

Определение 10.1. Объект называется *управляемым на заданном отрезке времени $[t_0, t_1]$ из множества M_0 в множество M_1* , если существует допустимое управление $u(s) \in \mathcal{U}$ и отвечающая этому управлению траектория $x(t)$ (т.е. $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$) для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ с начальным условием $x(t_0) \in M_0$ такая, что $x(t_1) \in M_1$.

Из определения множества достижимости ясно, что объект управляем на заданном отрезке $[t_0, t_1]$ из M_0 в M_1 тогда и только тогда, когда множество достижимости $X(t_1) \equiv X(t_0, t_1, M_0)$ пересекается с множеством M_1 :

$$\boxed{\text{управляемость на } [t_0, t_1] \text{ из } M_0 \text{ в } M_1} \Leftrightarrow \boxed{X(t_0, t_1, M_0) \cap M_1 \neq \emptyset}. \quad (1)$$

Так как $X(t_1), M_1 \in \Omega(\mathbb{E}^n)$, то на основании утверждения (1) и первой части [свойства 14, § 5](#), опорных функций получаем необходимое условие управляемости в форме

$$c(X(t_1), \psi) + c(M_1, -\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^n, \psi \neq 0, \quad (2)$$

которое можно переписать, заменив ψ на $\psi(t_1)$, в виде

$$c(X(t_1), \psi(t_1)) + c(M_1, -\psi(t_1)) \geq 0 \quad \forall \psi(t_1) \in \mathbb{E}^n, \psi(t_1) \neq 0. \quad (3)$$

Так как $\psi(t_1) \neq 0$, то этот ненулевой вектор в (3) можно рассматривать как значение сопряжённой переменной в момент времени t_1 . Тогда, привлекая формулу [\(5\), § 9](#), при $t = t_1$ из леммы о сопряжённой переменной, условие (3) можно переписать в форме

$$c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} c(U, \psi(s)) ds + c(M_1, -\psi(t_1)) \geq 0, \quad (4)$$

причём это условие должно выполняться для любой сопряжённой переменной $\psi(s), \psi(s)|_{s=t_0} = \psi(t_0), \psi(s)|_{s=t_1} = \psi(t_1)$.

Итак, получено необходимое условие управляемости в форме (4) (первая часть следующей теоремы).

Теорема (критерий управляемости)

- При $M_0, M_1 \in \Omega(\mathbb{E}^n)$ условие (4) является необходимым условием управляемости объекта на заданном отрезке времени $[t_0, t_1]$ из M_0 в M_1 .
- При $M_0, M_1 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n)$ условие (4) является необходимым и достаточным условием управляемости объекта на заданном отрезке времени $[t_0, t_1]$ из M_0 в M_1 .

Доказательство

Часть 1 этой теоремы доказана выше. Для доказательства части 2 остается проверить, что в случае выпуклых компактов M_0, M_1 условие (4) влечет управляемость. Условие (4) равносильно условию (3), а условие (3) может быть записано в форме (2), т.е.

$$c(X(t_1), \psi) + c(M_1, -\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in E^n.$$

Последнее условие и выпуклость компактов $X(t_1), M_1$ на основании [следствия из свойства 14, § 5](#), влекут соотношение $X(t_1) \cap M_1 \neq \emptyset$, равносильное управляемости, см. (1).

Критерий управляемости установлен.

Другая формулировка критерия управляемости. Перепишем условие управляемости (4), заменив там сопряжённую переменную по формуле [\(3\), § 9](#):

$$c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} c(U, e^{-(t-t_0)A} \psi(t_0)) ds + c(M_1, -e^{-(t_1-t_0)A} \psi(t_0)) \geq 0 \quad \forall \psi(t_0).$$

Введём функцию

$$\Phi_0(\psi) = c(M_0, \psi) + \int_{t_0}^{t_1} c(U, e^{-(t-t_0)A} \psi) ds + c(M_1, -e^{-(t_1-t_0)A} \psi) \quad (5)$$

(*функция управляемости*). Положим $m_0 = \min_{\psi \in S} \Phi_0(\psi)$. Ясно, что условие управляемости (4) равносильно каждому из следующих условий:

$$\Phi_0(\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in E^n, \quad (6)$$

$$\Phi_0(\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in S, \quad (7)$$

$$m_0 \geq 0. \quad (8)$$

Неравенства (6)-(8) являются другой формой условия управляемости (4) в терминах функции управляемости (5). Условия управляемости в форме (7), (8) удобны при рассмотрении конкретных примеров. Чтобы установить неуправляемость, достаточно указать такой вектор $\tilde{\psi} \in S$, для которого $\Phi_0(\tilde{\psi}) < 0$.

Упражнение 10.1. Записать условие управляемости в терминах функции управляемости

$$\Phi_1(\psi) = c(M_0, e^{-(t_1-t_0)A} \psi) + \int_{t_0}^{t_1} c(U, e^{-(t-t_0)A} \psi) ds + c(M_1, -\psi). \quad (9)$$

Какая связь существует между функциями управляемости (5) и (9)?

Пример 10.1. Пусть $n = 2$, $t_0 = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = S_1^+(0)$, $M_0 = S_\pi \left(\begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $M_1 = S_\pi \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Исследовать управляемость объекта из M_0 в M_1 на отрезках

- $[0, \frac{\pi}{2}]$,
- $[0, \pi]$,
- $[0, 2\pi]$.

Решение

Множества M_0, M_1 (рис. 10.1) – выпуклые компакты, и условие (8) является необходимым и достаточным условием

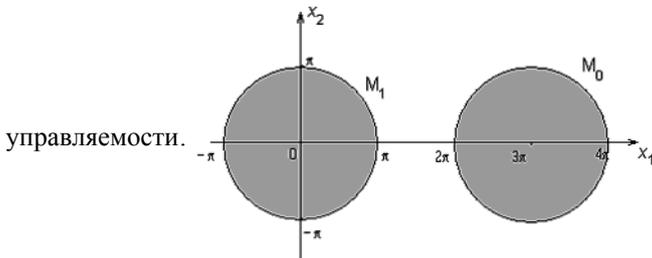


Рис. 10.1.

Для решения вопроса об управляемости найдём функцию управляемости $\Phi_0(\psi)$ на отрезке $[0, t_1]$. Имеем

$$c(M_0, \psi) = 3\pi\psi_1 + \pi \|\psi\|, \quad c(M_1, \psi) = \pi \|\psi\|, \quad c(U, \psi) = \|\psi\|$$

$$e^{-(t-t_0)A} = e^{-sA} = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix},$$

$$c(U, e^{-(t-t_0)A^*} \psi) = \|e^{-tA^*} \psi\| = \|\psi\|$$

$$c(M_1, -e^{-(t_1-t_0)A^*} \psi) = \pi \|e^{-t_1 A^*} \psi\| = \pi \|\psi\|.$$

Находим теперь функцию управляемости (5)

$$\Phi_0(\psi) = (3\pi\psi_1 + \pi \|\psi\|) + \int_0^{t_1} \|\psi\| ds + \pi \|\psi\| = 3\pi\psi_1 + (2\pi + t_1) \|\psi\|$$

и число

$$m_0 = \min_{\|\psi\|=1} \Phi_0(\psi) = t_1 - \pi.$$

Условие управляемости (8) принимает вид

$$t_1 - \pi \geq 0.$$

Таким образом, на отрезке $[0, t_1]$ объект управляем при $t_1 \geq \pi$ и неуправляем при $0 < t_1 < \pi$. В частности, на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ объект неуправляем, а на отрезках $[0, \pi], [0, 2\pi]$ объект управляем.

В примере 10.1 вопрос об управляемости был решен аналитическими средствами на основе критерия управляемости. Чтобы выяснить геометрические причины управляемости или неуправляемости на данном отрезке, мы в примере 10.2 изучим динамику множества достижимости $X(t) = X(0, t, M_0)$ объекта из примера 10.1.

Пример 10.2. Найти множество достижимости $X(t)$ для объекта из примера 10.1 в произвольный момент времени $t \geq 0$.

Привлекая формулу (5), § 8, ($t_0 = 0$)

$$c(X(t), \psi) = c(M_0, e^{tA} \psi) + \int_0^t c(U, e^{(t-s)A} \psi) ds. \quad (10)$$

найдем опорную функцию множества достижимости $X(t)$. Имеем

$$c(M_0, \psi) = 3\pi\psi_1 + \pi \|\psi\|,$$

$$e^{tA} \psi = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \cos t - \psi_2 \sin t \\ \psi_1 \sin t + \psi_2 \cos t \end{pmatrix}.$$

$$c(M_0, e^{tA} \psi) = 3\pi(\psi_1 \cos t - \psi_2 \sin t) + \pi \|e^{tA} \psi\| = (3\pi \cos t)\psi_1 + (-3\pi \sin t)\psi_2 + \pi \|\psi\|. \quad (11)$$

$$\int_0^t c(U, e^{(t-s)A} \psi) ds = t \|\psi\|. \quad (12)$$

Тогда подстановка (11), (12) в (10) даёт

$$c(X(t), \psi) = (3\pi \cos t)\psi_1 + (-3\pi \sin t)\psi_2 + (\pi + t) \|\psi\| = c(S_{r(t)}(a(t)), \psi), \quad (13)$$

где $r(t) = \pi + t$, $a(t) = 3\pi \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$. Из (13) следует, что

$$X(t) = S_{r(t)}(a(t)),$$

т.е. множество достижимости $X(t)$ является кругом радиуса $r(t) = \pi + t$, центр которого $a(t)$ движется по окружности радиуса 3π в направлении вращения часовой стрелки (рис. 10.2).

Ясно, что

$$X(t)|_{t=0} = S_{\pi} \begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} = M_0, \quad X(t)|_{t=\frac{\pi}{2}} = S_{\frac{3\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -3\pi \end{pmatrix}, \quad X(t)|_{t=\pi} = S_{2\pi} \begin{pmatrix} -3\pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

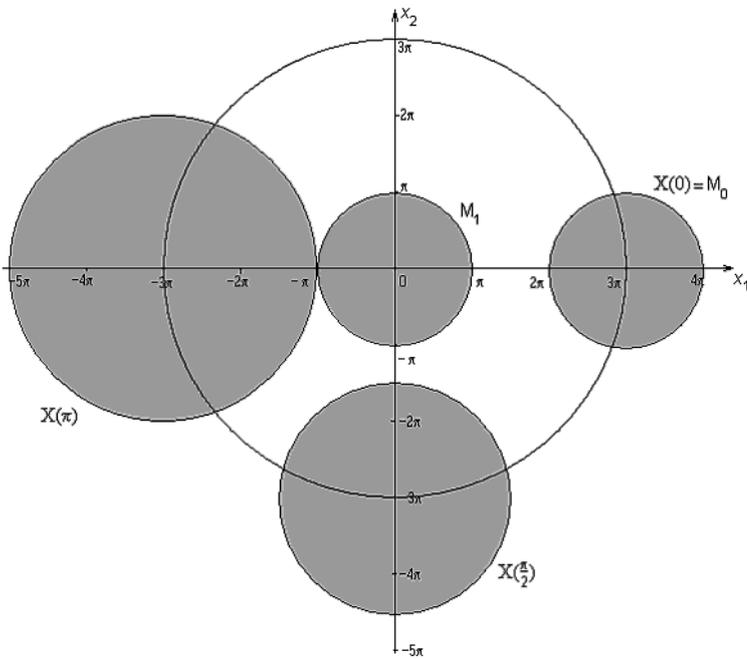


Рисунок 10.2.

При $0 < t < \pi$ множество достижимости $X(t)$ не пересекается с множеством M_1 (что соответствует неуправляемости объекта на отрезке $[0, t], 0 < t < \pi$). В момент времени $t = \pi$ возникает первый контакт множества достижимости с множеством M_1 в точке $(-\pi, 0)$ (время $\pi - 0$ – минимальное время перехода из M_0 в M_1 , т.е. время быстрогодействия). При всех $t \geq \pi$ множество $X(t)$ пересекается с M_1 , что соответствует управляемости объекта на любом отрезке $[0, t]$, где $t \geq \pi$.

Упражнение 10.2. Построить множества $X(\frac{3\pi}{2}), X(2\pi), X(3\pi)$.

Упражнение 10.3. Построить множество управляемости $Z(t) = Z(t, \pi, M_1), 0 \leq t \leq \pi$. Показать, что $Z(t) = S_{2\pi-t}(0)$. Установить взаимное расположение множеств $X(t)$ и $Z(t)$ при $0 \leq t \leq \pi$.

Рассмотрим множества $X(\pi)$ и M_1 , имеющие одну общую точку $(-\pi, 0)$. Для этих множеств должно выполняться условие управляемости

$$c(X(\pi), \psi) + c(M_1, -\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in S. \quad (14)$$

Это условие можно проверить непосредственно:

$$c(X(\pi), \psi) = -3\pi\psi_1 + 2\pi \|\psi\|,$$

$$c(M_1, -\psi) = \pi \|\psi\|,$$

$$c(X(\pi), \psi) + c(M_1, -\psi) = -3\pi\psi_1 + 2\pi \|\psi\| + \pi \|\psi\| = 3\pi(\|\psi\| - \psi_1) \geq 0 \quad \forall \psi \in S.$$

Обратим внимание на то, что для единичного вектора

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

выполняется равенство

$$c(X(\pi), \bar{\psi}) + c(M_1, -\bar{\psi}) = 0. \quad (15)$$

т.е. неравенство (14) при $\psi = \bar{\psi}$ превращается в равенство. Вектор $\bar{\psi}$, для которого выполнено равенство (15), имеет простой

геометрический смысл (рис. 10.3):

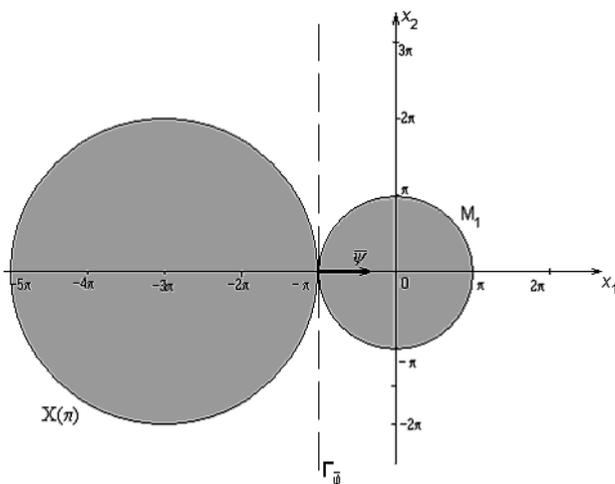


Рисунок 10.3.

$\bar{\psi}$ – вектор нормали к гиперплоскости $\Gamma_{\bar{\psi}}$ (прямой, проходящей через общую точку $(-\pi, 0)$ множеств $X(\pi)$ и M_1), которая "разделяет" множества $X(\pi)$ и M_1 . Напомним, что в рассматриваемом примере момент времени $t = \pi$ есть первый момент касания множества достижимости $X(t)$ с множеством конечных состояний M_1 .

Лемма (основная)

Пусть

$$1. M_0, M_1 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n);$$

2. $t_1 - t_0 = \min$, т.е. $t_1 - t_0$ – оптимальное время перехода из M_0 в M_1 в рассматриваемой задаче быстрогодействия

$$\dot{x} = Ax + u, \quad x(t_0) \in M_0, \quad x(t_1) \in M_1.$$

Тогда существует такая сопряжённая переменная $\psi(t)$, для которой в условии управляемости реализуется знак равенства:

$$c(X(t_1), \psi(t_1)) + c(M_1, -\psi(t_1)) = 0,$$

или, в более подробной записи,

$$c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} c(U, \psi(s)) ds + c(M_1, -\psi(t_1)) = 0.$$

Доказательство

По условию основной леммы

$$X(t_1) \cap M_1 \neq \emptyset, \quad (16)$$

$$X(t) \cap M_1 = \emptyset \quad \text{при } t_0 \leq t < t_1. \quad (17)$$

Условие (16) на основании [теоремы об управляемости](#) (часть 2) равносильно условию

$$c(X(t_1), \psi(t_1)) + c(M_1, -\psi(t_1)) \geq 0 \quad \forall \psi(t_1) \in S. \quad (18)$$

Рассмотрим последовательность $\{t^k\}, t_0 < t^k < t_1; t^k \rightarrow t_1 - 0$ при $k \rightarrow \infty$. из (17) следует, что

$$X(t^k) \cap M_1 = \emptyset \quad \forall k. \quad (19)$$

Так как $X(t^k), M_1 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n)$, то из (19) в силу следствия из [свойства 14, § 5](#),

$$\forall k \quad \exists p^k \in S: \quad c(X(t^k), p^k) + c(M_1, -p^k) < 0. \quad (20)$$

Из последовательности $\{p^k\}$ единичных векторов выберем сходящуюся к некоторому вектору $p_* \in S$ подпоследовательность; не изменяя обозначений, будем считать, что $p^k \rightarrow p_*$ при $k \rightarrow \infty$. Используя непрерывность опорной функции по совокупности двух аргументов, непрерывную зависимость множества достижимости $X(t)$ от t , предельные соотношения $t^k \rightarrow t_1, p^k \rightarrow p_*$ ($k \rightarrow \infty$) и выполняя в (20) переход к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем неравенство

$$c(X(t_1), p_*) + c(M_1, -p_*) \leq 0. \quad (21)$$

Полагая в (18) $\psi(t_1) = p_*$, запишем неравенство

$$c(X(t_1), p_*) + c(M_1, -p_*) \geq 0. \quad (22)$$

Сравнение (21) с (22) приводит к равенству

$$c(X(t_1), p_*) + c(M_1, -p_*) = 0, \quad p_* \in S,$$

которое доказывает утверждение основной леммы с сопряжённой переменной $\psi(t)$, удовлетворяющей условию $\psi(t_1) = p_*$.

Основная лемма доказана.

Выше мы проиллюстрировали утверждение основной леммы на конкретном примере. В § 11 основная лемма будет использована при доказательстве теоремы о необходимых условиях оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

Упражнение 10.4. Показать, что утверждение основной леммы без предположения о выпуклости компактов M_0 и M_1 неверно. Рассмотреть пример

$$n = 2, A = 0, t_0 = 0, M_0 = \{0\}, U = S_1(0), M_1 = \begin{pmatrix} (-1, 0) \\ (1, 0) \end{pmatrix}, t_1 = 1.$$

Замечание 10.1. Анализ доказательства основной леммы показывает, что её второе условие можно заменить следующим: существует последовательность $\{t^k\}$, сходящаяся к t_1 , такая, что

$$X(t_1) \cap M_1 \neq \emptyset, X(t^k) \cap M_1 = \emptyset \quad \forall k.$$

Это замечание объясняет, почему принцип максимума Понтрягина, доказательство которого опирается на основную лемму, является только необходимым условием оптимальности, но в общем случае не является достаточным условием оптимальности в линейной задаче быстрого действия. Геометрическая идея построения соответствующих примеров связана с тем, что множество достижимости $X(t)$ может (после первого момента t_1 встречи с M_1) оторваться от множества M_1 в некоторый момент $t = t_2 > t_1$

$$(\text{при этом } X(t_2) \cap M_1 \neq \emptyset, X(t) \cap M_1 = \emptyset \text{ при малых } t - t_2 > 0);$$

впоследствии при некотором $t = t_3 > t_2$ может произойти повторная встреча множества достижимости $X(t)$ с M_1

$$(X(t_3) \cap M_1 \neq \emptyset, X(t) \cap M_1 = \emptyset \text{ при малых } t - t_3 < 0).$$

В таких ситуациях на отрезках $[t_0, t_1], [t_0, t_2], [t_0, t_3]$ в случае выпуклости компактов M_0, M_1 имеет место утверждение основной леммы.

Упражнение 10.5. Проиллюстрировать замечание 10.1 конкретными примерами.

Лекция 9

§ 11. Принцип максимума Понтрягина. Теорема о необходимых условиях оптимальности в линейной задаче быстрогодействия

11.1. Рассмотрим линейную задачу быстрогодействия

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u, \\ x(t_0) \in M_0, \\ x(t_1) \in M_1, \\ t_1 - t_0 \rightarrow \min, \end{cases} \quad (1)$$

определяемую набором исходных данных $\{A, M_0, M_1, \mathcal{U} = \mathcal{U}_{U, t_0}\}$. Напомним, что $M_0, M_1, U \in \Omega(\mathbb{E}^n)$. Изучим сейчас основной вопрос нашего курса – *теорему о необходимых условиях оптимальности* для линейной задачи быстрогодействия (1) (*принцип максимума Понтрягина*). При доказательстве этой теоремы существенно используется основная лемма, доказанная в § 10.

11.2. Основная лемма.

В случае $M_0, M_1 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n), t_1 - t_0 = \min$ существует сопряжённая переменная $\psi(t)$, для которой выполняется равенство

$$c(X(t_1), \psi(t_1)) + c(M_1, -\psi(t_1)) = 0. \quad (2)$$

11.3. Принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим пару

$$(x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

где

- $u(t) \in \mathcal{U}$, т.е. $u(t)$ – допустимое управление, определённое на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$, причём в каждый момент времени $t \in [t_0, t_1]$ значение $u(t) \in U$,
- $x(t)$ – траектория, отвечающая управлению $u(t)$, т.е. $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$, и удовлетворяющая краевым условиям $x(t_0) \in M_0, x(t_1) \in M_1$.

Будем говорить, что эта пара $(x(t), u(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке $[t_0, t_1]$, если существует такая сопряжённая переменная $\psi(t)$ (ненулевое решение сопряжённого уравнения $\dot{\psi} = -A^*\psi$), что выполнены следующие три условия:

- $(u(t), \psi(t)) = c(U, \psi(t))$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ (*условие максимума*),
- $(x(t_0), \psi(t_0)) = c(M_0, \psi(t_0))$ (*условие трансверсальности на множестве M_0*),
- $(x(t_1), -\psi(t_1)) = c(M_1, -\psi(t_1))$ (*условие трансверсальности на множестве M_1*),

Геометрический смысл условий а), б), в) указан на рис. 11.1.

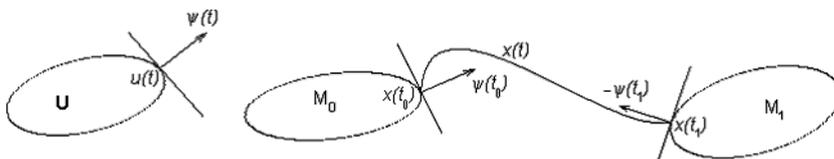


Рисунок 11.1.

Содержанием настоящего п.11.3 является введение терминологии, разъясняющей, что подразумевается, когда мы говорим, что "пара $(x(t), u(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке $[t_0, t_1]$ ".

11.4. Теорема о необходимых условиях оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

Теорема (о необходимых условиях оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина)

Пусть

- $M_0, M_1 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n)$,
- пара $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, решает линейную задачу быстрогодействия (1), т.е. $u(t) \in \mathcal{U}$, $x(t_0) \in M_0$, $x(t_1) \in M_1$, $t_1 - t_0 = \min$.

Тогда пара $(x(t), u(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке $[t_0, t_1]$.

Структура сформулированной теоремы отображена на рис.11.2.



Рисунок 11.2.

Доказательство

По условиям теоремы

$$X(t_1) \equiv X(t_0, t_1, M_0), \quad M_1 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n),$$

$$t_1 - t_0 = \min, \quad X(t_0, t_1, M_0) \cap M_1 \neq \emptyset.$$

В соответствии с основной леммой существует сопряжённая переменная $\psi(t)$, с которой выполнено равенство (2):

$$c(X(t_1), \psi(t_1)) + c(M_1, -\psi(t_1)) = 0,$$

где $X(t_1) = X(t_0, t_1, M_0)$ – множество достижимости. Покажем, что с этой же сопряжённой переменной $\psi(t)$ выполняются условия а), б), в) принципа максимума Понтрягина.

Вычитая из (2) почленно очевидное равенство

$$(x(t_1), \psi(t_1)) + (x(t_1), -\psi(t_1)) = 0,$$

получаем

$$[c(X(t_1), \psi(t_1)) - (x(t_1), \psi(t_1))] + [c(M_1, -\psi(t_1)) - (x(t_1), -\psi(t_1))] = 0. \quad (3)$$

Каждая из двух разностей в левой части (3) неотрицательна; это следует из определения опорной функции и соотношений $x(t_1) \in X(t_1)$, $x(t_1) \in M_1$. Поэтому каждая из этих разностей равна нулю, т.е.

$$c(M_1, -\psi(t_1)) - (x(t_1), -\psi(t_1)) = 0, \quad (4)$$

$$c(X(t_1), \psi(t_1)) - (x(t_1), \psi(t_1)) = 0. \quad (5)$$

Равенство (4) доказывает справедливость условия в) принципа максимума Понтрягина (условие трансверсальности на множестве M_1). Покажем теперь, что равенство (5) влечет выполнение условий а), б) принципа максимума Понтрягина.

Используя лемму о сопряжённой переменной (§ 10, формулы (5) и (7) при $t = t_1$), запишем условие (5) в форме

$$[c(M_0, \psi(t_0)) - (x(t_0), \psi(t_0))] + \int_{t_0}^{t_1} [c(\mathcal{U}, \psi(s)) - (u(s), \psi(s))] ds = 0. \quad (6)$$

Так как $x(t_0) \in M_0$, то

$$c(M_0, \psi(t_0)) - (x(t_0), \psi(t_0)) \geq 0; \quad (7)$$

так как $u(s) \in \mathcal{U}$, $s \in [t_0, t_1]$, то

$$c(\mathcal{U}, \psi(s)) - (u(s), \psi(s)) \geq 0, \quad (8)$$

и

$$\int_{t_0}^{t_1} [c(\mathcal{U}, \psi(s)) - (u(s), \psi(s))] ds \geq 0. \quad (9)$$

Из (6), (7) и (9) следуют равенства

$$c(M_0, \psi(t_0)) - (x(t_0), \psi(t_0)) = 0, \quad (10)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} [c(U, \psi(s)) - (u(s), \psi(s))] ds = 0. \quad (11)$$

Равенство (10) равносильно условию б) принципа максимума Понтрягина (условию трансверсальности на множестве M_0). Из условий (11) и (8) следует, что

$$c(U, \psi(s)) - (u(s), \psi(s)) = 0 \text{ для почти всех } s \in [t_0, t_1].$$

Последнее утверждение доказывает условие а) принципа максимума Понтрягина (условие максимума).

11.5. Лемма об эквивалентной формулировке принципа максимума Понтрягина в терминах множеств достижимости $X(t)$ и управляемости $Z(t)$. Геометрическая интерпретация сопряжённой переменной $\psi(t)$

В этом пункте мы не будем предполагать оптимальности пары $(x(t), u(t)), t_0 \leq t \leq t_1$, и выпуклости компактов M_0, M_1 .

Лемма

Пусть $M_0, M_1 \in \Omega(E^n)$. Равносильны следующие два условия:

I) Пара $(x(t), u(t)), t_0 \leq t \leq t_1$, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина с сопряжённой переменной $\psi(t)$.

II) Выполняются равенства

$$(x(t), \psi(t)) = c(X(t), \psi(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (12)$$

$$(x(t), -\psi(t)) = c(Z(t), -\psi(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (13)$$

с сопряжённой переменной $\psi(t)$.

Здесь

$X(t) = X(t_0, t, M_0)$ – множество достижимости,

$Z(t) = Z(t, t_1, M_1)$ – множество управляемости,

$\psi(t)$ – сопряжённая переменная (в каждом из условий участвует одна и та же сопряжённая переменная).

Доказательство

Проверим сначала, что условие I влечет условие II. Пусть выполнено условие I. Тогда

$$c(X(t), \psi(t)) = \{ \text{Формула (5), § 9} \} = c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^t c(U, \psi(s)) ds = \{ \text{Условие I, а), б)} \} = (x(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^t (u(s), \psi(s)) ds = \{ \text{Формула (7), § 9} \} = (x(t), \psi(t)),$$

т.е. доказано равенство (12). Равенство (13) доказывается совершенно аналогично с помощью леммы о сопряжённой переменной:

$$\begin{aligned} c(Z(t), -\psi(t)) &= \{ \text{формула 6, § 9} \} = c(M_1, -\psi(t_1)) + \int_t^{t_1} c(U, \psi(s)) ds = \{ \text{Условие I а), б)} \} = \\ &= (x(t_1), -\psi(t_1)) + \int_t^{t_1} (u(s), \psi(s)) ds = \{ \text{формула 8, § 9} \} = (x(t), -\psi(t)) \end{aligned}$$

Проверим теперь, что условие II влечет условие I. Пусть выполнено условие II; полагая в (12) $t = t_0$ и в (13) $t = t_1$, получаем условия трансверсальности принципа максимума Понтрягина; используя (12) и выполняя почленное вычитание формул (5) и (7), § 9, получаем

$$0 = 0 + \int_{t_0}^t [c(U, \psi(s)) - (u(s), \psi(s))] ds, \quad t \in [t_0, t_1];$$

выполнив здесь дифференцирование по аргументу t , приходим к соотношению

$$c(U, \psi(t)) - (u(t), \psi(t)) = 0 \text{ для почти всех } t \in [t_0, t_1],$$

т.е. к условию максимума а) принципа максимума Понтрягина.

Равенства (12), (13) позволяют дать геометрическую интерпретацию сопряжённой переменной с привлечением множеств $X(t)$ и $Z(t)$. Пусть пара $(x(t), u(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке $[t_0, t_1]$ с сопряжённой переменной $\psi(t)$. Рассмотрим гиперплоскость

$$\Gamma_{\psi(t)} = \{y \in E^n : (y - x(t), \psi(t)) = 0\},$$

вектором нормали которой служит сопряжённая переменная $\psi(t)$. Точка $x(t)$ принадлежит каждому из множеств $X(t)$, $Z(t)$, $\Gamma_{\psi(t)}$. Гиперплоскость $\Gamma_{\psi(t)}$ в каждый момент времени $t \in [t_0, t_1]$ разделяет множества достижимости $X(t)$ и управляемости $Z(t)$,

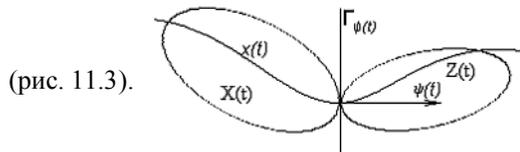


Рисунок 11.3.

Упражнение 11.1. Пусть пара $(x(t), u(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке $[t_0, t_1]$ с сопряжённой переменной $\psi(t)$. Доказать, что гиперплоскость $\Gamma_{\psi(t)}$ разделяет множества $X(t)$ и $Z(t)$, т.е.

$$\forall \xi \in X(t) : (\xi - x(t), \psi(t)) \leq 0,$$

$$\forall \zeta \in Z(t) : (\zeta - x(t), -\psi(t)) \leq 0,$$

(рис. 11.4).

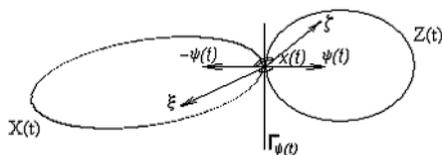


Рисунок 11.4.

Лекция 10

§ 12. Теорема существования оптимального управления

При доказательстве теоремы существования оптимального управления в линейной задаче быстрогодействия предполагается компактность множеств M_0, M_1 (выпуклости этих множеств не требуется) и существенно используется компактность множества достижимости $X(t)$ и его непрерывная зависимость от времени t (см. § 8); кроме того, предполагается управляемость объекта из M_0 в M_1 на некотором конечном отрезке времени $[t_0, T]$.

В случае выпуклости компактов M_0, M_1 доказательство теоремы сильно упрощается (см. ниже [Замечание 12.1](#)).

Теорема 12.1.

Пусть

- $M_0, M_1 \in \Omega(E^n)$;
- класс допустимых управлений \mathcal{U} состоит из функций, интегрируемых по Лебегу;
- на некотором конечном отрезке времени $[t_0, T]$ объект управляем из M_0 в M_1 .

Тогда в классе допустимых управлений \mathcal{U} существует оптимальное управление $u(t), t_0 \leq t \leq t_1, t_1 \leq T$, для рассматриваемой линейной задачи быстрогодействия.

Доказательство

Пусть $X(t) = X(t_0, t, M_0)$ – множество достижимости. По третьему условию теоремы

$$X(T) \cap M_1 \neq \emptyset, \quad (1)$$

т.е. множество $X(T)$ имеет хотя бы одну общую точку с множеством M_1 (рис. 12.1).

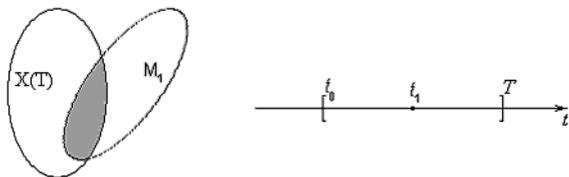


Рисунок 12.1.

Рассмотрим множество

$$I = \{t \in [t_0, T] : X(t) \cap M_1 \neq \emptyset\}.$$

Это множество непусто, так как $T \in I$, см. (1), и ограничено снизу числом t_0 . Положим

$$t_1 = \inf I.$$

Из определения числа t_1 следует, что

$$X(t) \cap M_1 = \emptyset \text{ при } t_0 \leq t < t_1. \quad (2)$$

Мы покажем ниже, что

$$X(t_1) \cap M_1 \neq \emptyset. \quad (3)$$

Выполнение соотношений (2) и (3) означает оптимальность времени t_1 . Из (3) и определения множества достижимости $X(t_1)$ следует существование допустимого управления $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$, переводящего объект из множества M_0 на множество M_1 . Это управление и является оптимальным управлением для рассматриваемой линейной задачи быстрогодействия.

Итак, остается доказать утверждение (3). Это доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма 12.1.

Существует такая точка $x_* \in M_1$, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad x_* \in X(t_1) + S_\varepsilon(0).$$

Доказательство

Возьмем последовательность $\{T^k\}$ такую, что

$$T^k \geq t_1, \quad T^k \rightarrow t_1 \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad X(T^k) \cap M_1 \neq \emptyset \quad \forall k.$$

Возможность выбора такой последовательности $\{T^k\}$ вытекает из определения числа t_1 . Существует такая точка $x^k \in E^n$, что

$$x^k \in X(T^k) \cap M_1 \quad \forall k. \quad (4)$$

Так как $x^k \in M_1 \quad \forall k$, и M_1 — компакт, то из последовательности $\{x^k\}$ можно выбрать сходящуюся к некоторой точке $x_* \in M_1$ подпоследовательность. Не изменяя обозначений, будем считать, что

$$x^k \rightarrow x_* \in M_1 \quad k \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Из непрерывной зависимости множества достижимости $X(t)$ от времени t ([§ 8 свойство 4](#)) и предельного соотношения $T^k \rightarrow t_1 \quad (k \rightarrow \infty)$ следует, что

$$h(X(T^k), X(t_1)) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Из (5), (6) следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$

- $\exists k_0 = k_0(\varepsilon) > 0: \forall k \geq k_0 \quad \|x_* - x^k\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, т.е.

$$\forall k \geq k_0 \quad x_* \in (x^k) + S_{\frac{\varepsilon}{2}}(0); \quad (7)$$

- $\exists k_1 = k_1(\varepsilon) > 0: \forall k \geq k_1 \quad h(X(T^k), X(t_1)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$,

и поэтому в силу определения расстояния Хаусдорфа

$$\forall k \geq k_1 \quad X(T^k) \subset X(t_1) + S_{\frac{\varepsilon}{2}}(0). \quad (8)$$

Полагая $k_2 = \max\{k_0, k_1\}$ и привлекая соотношения (7), (4), (8), получим (считая номер $k \geq k_2$)

$$x_* \in (x^k) + S_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \subset X(T^k) + S_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \subset X(t_1) + S_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) + S_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) = X(t_1) + S_\varepsilon(0).$$

Лемма 12.1 доказана.

Покажем, в заключение, что утверждение (3) следует из доказанной леммы 12.1. Действительно, положив $\varepsilon = \frac{1}{m}, m = 1, 2, \dots$, имеем

$$x_* \in M_1 \text{ и } x_* \in X(t_1) + \frac{1}{m} S_1(0), \quad m = 1, 2, \dots$$

По определению алгебраической суммы двух множеств точку x_* можно представить в виде

$$x_* = \xi^m + \frac{1}{m} \psi^m, \text{ где } \xi^m \in X(t_1), \quad \|\psi^m\| \leq 1. \quad (9)$$

В силу компактности множества достижимости $X(t_1)$ из последовательности $\{\xi^m\}$ можно выбрать сходящуюся к некоторой точке $\xi_* \in X(t_1)$ подпоследовательность. Не изменяя обозначений, будем считать, что $\xi^m \rightarrow \xi_*$, $m \rightarrow \infty$. Тогда предельный переход при $m \rightarrow \infty$ в (9) дает $x_* = \xi_* \in X(t_1)$, т.е. доказано соотношение (3), так как $x_* \in X(t_1)$ и одновременно $x_* \in M_1$.

Замечание 12.1. В случае выпуклости компактов M_0, M_1 теорема существования оптимального управления доказывается намного проще. Действительно, в силу выпуклости компактов $X(T^k)$ ([§ 8, свойство 3](#)) и M_1 , условие

$$X(T^k) \cap M_1 \neq \emptyset$$

на основании следствия из [свойства 14, § 5](#), равносильно условию

$$c(X(T^k), \psi) + c(M_1, -\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in S.$$

Перейдём в последнем неравенстве к пределу, устремив k к бесконечности (при каждом фиксированном $\psi \in S$). Тогда, используя свойство непрерывности опорной функции по первому аргументу и условие (6), получим неравенство

$$c(X(t_1), \psi) + c(M_1, -\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in S,$$

которое, в силу следствия из [свойства 14, § 5](#), равносильно условию (3), что завершает доказательство теоремы существования в случае $M_0, M_1 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{R}^n)$.

§ 13. Примеры применения необходимых условий оптимальности для решения линейных задач быстродействия

Теорема о необходимых условиях оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина ([§11](#)) и теорема существования оптимального управления ([§12](#)) позволяют в рассмотренных ниже примерах построить оптимальные решения. Здесь мы пользуемся следующей схемой рассуждений: если существует единственная пара $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, удовлетворяющая принципу максимума Понтрягина, то эта пара является оптимальной. Действительно, наличие такой пары обеспечивает управляемость объекта на отрезке $[t_0, t_1]$ и (на основании [теоремы из §12](#)) существование оптимального управления. Оптимальная пара должна удовлетворять принципу максимума Понтрягина ([теорема из §11, п.11.4](#)), и в силу единственности пары $(x(t), u(t))$, удовлетворяющей принципу максимума, эта пара $(x(t), u(t))$ оптимальна.

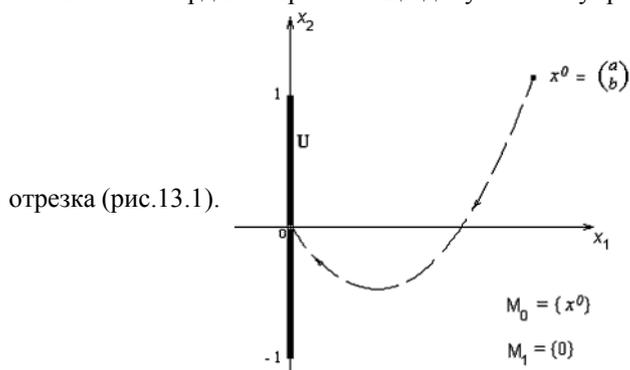
В примерах 13.1, 13.2 множества M_0, M_1 состоят из одной точки (при этом условия трансверсальности б), в) выполняются автоматически и в анализе задачи участия не принимают). В примере 13.1 пара $(x(t), u(t))$, удовлетворяющая принципу максимума, единственна. В примере 13.2 рассмотрена ситуация, когда пара $(x(t), u(t))$, удовлетворяющая принципу максимума, не единственна; это обстоятельство позволяет поставить вопрос о получении достаточных условий оптимальности (см. [§§14, 15](#)). Рассмотрены также примеры, требующие привлечения условий трансверсальности.

Пример 13.1. Рассмотрим линейную задачу быстродействия при $n = 2$, $t_0 = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \{u_1 = 0, |u_2| \leq 1\}$, $M_0 = \{x^0\}$, $M_1 = \{0\}$; $x^0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$,

т.е. следующую задачу

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u_2, \quad |u_2| \leq 1, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in U = \{u_1 = 0, |u_2| \leq 1\} \\ x_1(0) &= a, \quad x_2(0) = b, \quad x_1(t_1) = 0, \quad x_2(t_1) = 0, \\ t_1 &\longrightarrow \min. \end{aligned}$$

(задача быстродействия для тележки, движущейся без трения под действием ограниченной внешней силы). Множество M_0 начальных состояний состоит из одной точки $x^0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, а множество M_1 конечных состояний состоит из одной точки, совпадающей с началом координат фазовой плоскости. Требуется перевести рассматриваемый управляемый объект из точки x^0 в начало координат при помощи допустимого управления за минимальное время. Область управления U имеет форму



отрезка (рис. 13.1).

Рисунок 13.1.

Для решения этой задачи применяем принцип максимума Понтрягина (условие максимума а); условия трансверсальности б), в), которые для одноточечных множеств выполняются автоматически, в решении задачи участия не принимают).

Пусть $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ — оптимальное управление. Оно удовлетворяет условию максимума а)

$$(u(t), \psi(t)) = c(U, \psi(t)) \quad (1)$$

с некоторой сопряжённой переменной $\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}$.

Так как $c(U, \psi) = |\psi_2|$, $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, то условие (1) принимает вид

$$u_1(t)\psi_1(t) + u_2(t)\psi_2(t) = |\psi_2(t)|. \quad (2)$$

Так как $u(t) \in U$, то $u_1(t) = 0$, и условие (2) можно записать в форме

$$u_2(t)\psi_2(t) = |\psi_2(t)|. \quad (3)$$

Из (3) получаем, что

$$\begin{aligned} u_2(t) &= 1, & \text{если } \psi_2(t) > 0, \\ u_2(t) &= -1, & \text{если } \psi_2(t) < 0, \\ -1 \leq u_2(t) \leq 1, & & \text{если } \psi_2(t) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В последнем случае ($\psi_2(t) = 0$) управление $u_2(t)$ условием максимума (3) не определяется однозначно. Найдём сопряжённую переменную $\psi(t) = e^{-At} \psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{10} \\ \psi_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{10} \\ -t\psi_{10} + \psi_{20} \end{pmatrix}$; здесь $\psi(0) = \begin{pmatrix} \psi_{10} \\ \psi_{20} \end{pmatrix} \neq 0$ — вектор начальных значений сопряжённой переменной.

Таким образом,

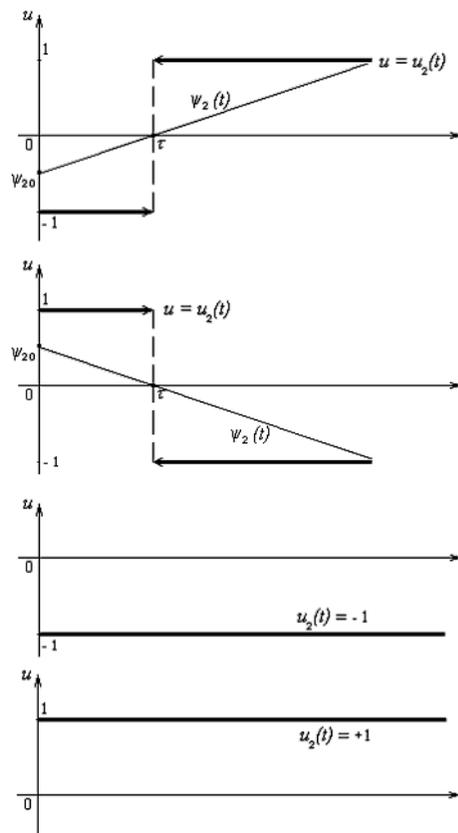
$$\psi_1(t) = \psi_{10}, \quad \psi_2(t) = -t\psi_{10} + \psi_{20}. \quad (5)$$

Функция $\psi_2(t)$ линейно зависит от времени t и имеет не более одного корня. Поэтому управление $u_2(t)$ однозначно определяется сопряжённой переменной при всех t , кроме того t , для которого $\psi_2(t) = 0$, см. (4). Итак,

$$u_2(t) = \text{sign } \psi_2(t). \quad (6)$$

Принцип максимума, таким образом, позволил нам установить следующее очень важное качественное свойство оптимального управления (см. (6)): оптимальное управление $u_2(t)$ является кусочно-постоянной функцией времени t , принимающей значения ± 1 и имеющей не более одной точки переключения. В зависимости от начальных значений сопряжённой переменной ψ_{10}, ψ_{20} управление $u_2(t)$, определяемое формулой (6), может иметь только один из следующих типов, см. рисунок 13.2.

- $u_2(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < \tau \\ +1, & \tau < t \end{cases}$ (одна точка переключения τ)
- $u_2(t) = \begin{cases} +1, & 0 \leq t < \tau \\ -1, & \tau < t \end{cases}$ (одна точка переключения τ)
- $u_2(t) = -1$ (точек переключения нет)



- $u_2(t) = +1$ (точек переключения нет)

Рисунок 13.2.

Упражнение 13.1. Выяснить, при каких условиях на ψ_{10}, ψ_{20} реализуется каждый из четырёх типов I-IV управления $u_2(t), t \geq 0$.

В точке переключения $\tau = \frac{v_{10}}{v_{10}}$ управление $u_2(t)$ условием максимума не определяется однозначно, см. (4).

Таким образом, оптимальное управление $u_2(t)$ может иметь только один из указанных четырех типов I-IV. Нам пока неизвестно, какой именно тип оптимального управления $u_2(t)$ соответствует заданному начальному состоянию объекта x^0 .

Чтобы решить последний вопрос, мы найдём сначала траектории рассматриваемой управляемой системы при $u_2 = +1$, т.е. системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= +1. \end{aligned} \quad (7)$$

Имеем $\frac{dx_1}{dx_2} = x_2$, откуда

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + c_1, \quad (8)$$

где c_1 — постоянная интегрирования. Уравнением (8) определяется свойство парабол, изображённых на рисунке 13.3.

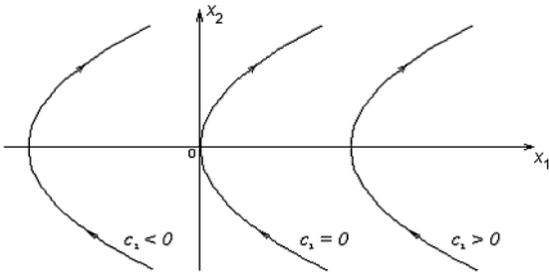


Рисунок 13.3.

Движение фазовой точки системы (7) по параболам семейства (8) происходит снизу вверх при возрастании времени t , так как $\dot{x}_2 = 1 > 0$; это обозначено на рис.13.3 стрелками.

При $u_2 = -1$ вместо семейства парабол (8) получаем семейство парабол

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + c_2, \quad (9)$$

изображённых на рис.13.4. Движение фазовой точки по параболам семейства (9) происходит сверху вниз, так как теперь

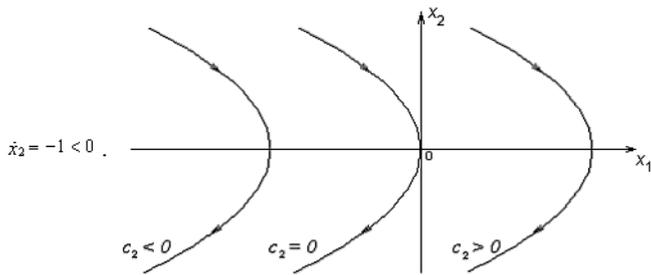


Рисунок 13.4.

Поставим вопрос: из каких точек фазовой плоскости можно попасть в начало координат за конечное время при помощи постоянного управления $u_2(t) \equiv +1$, т.е. по траекториям (8) системы (7)? Рассмотрение рис. 13.3 позволяет получить следующий ответ: Такие точки расположены на части AO параболы семейства (8), проходящей через начало координат ($c_1 = 0$), см. рис 13.5.

Те точки фазовой плоскости, из которых можно попасть в начало координат за конечное время при помощи постоянного управления $u_2(t) \equiv -1$, заполняют часть BO , параболы семейства (9), проходящей через начало координат $c_2 = 0$, (рис 13.5)

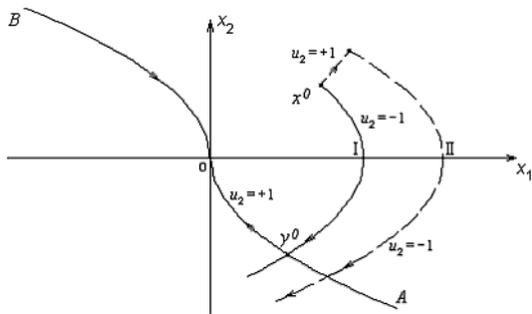


Рисунок 13.5.

Из точек фазовой плоскости, не лежащих на линии AOB , попасть в начало координат при помощи постоянных управлений $u_2 = +1$ или $u_2 = -1$ невозможно (проверить).

Рассмотрим теперь случай, когда точка x^0 (начальное состояние объекта) расположена выше линии AOB . При движении фазовой точки из начального состояния x^0 при помощи любого управления $u_2(t)$ типа II, см. рис. 13.2, фазовая точка никогда (при любом выборе точки переключения τ) не попадет в начало координат, см. пунктирную кривую II на рис. 13.5. Если же, начиная движение из начального состояния x^0 , использовать управление $u_2(t)$ типа I, см. рис. 13.2, то на начальном интервале $u_2(t) = -1, t \in (0, \tau)$, и движение фазовой точки будет происходить по параболе семейства (9), проходящей через точку x^0 , см. кривую I на рис. 13.5. Эта парабола I пересекается с линией AO в точке y^0 . В момент τ , когда фазовая точка попадает в точку y^0 , изменим знак управления $u_2(t)$, положив $u_2(t) = +1$. Тогда фазовая точка продолжит движение из точки y^0 по линии AO вверх и через некоторое конечное время попадает в начало координат. При переключении управления $u_2(t)$ до попадания в точку y^0 , либо после прохождения точки y^0 , управление типа I не приводит к попаданию фазовой точки в начало координат.

В случае расположения начальной точки x^0 ниже линии AOB , называемой *линией переключения*, задача попадания в начало координат при помощи управлений $u_2(t)$, удовлетворяющих принципу максимума, решается аналогичным образом при помощи управлений типа II, см. рис. 13.5.

Итак, для любой точки x^0 фазовой плоскости существует пара $(x(t), u(t))$, удовлетворяющая принципу максимума Понтрягина, причём эта пара единственна. Из сказанного в начале §13 следует оптимальность построенной пары.

Найдем оптимальное время $T(x^0) = T(a, b)$ перехода из точки $x^0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ в начало координат. Пусть точка x^0 лежит выше линии переключения AOB . Тогда

$$T(a, b) = \tau_{x^0 y^0} + \tau_{y^0 0},$$

где $\tau_{x^0 y^0}$ — время движения из точки x^0 в точку y^0 , а $\tau_{y^0 0}$ — время движения из точки y^0 в начало координат.

Для нахождения координат точки y^0 рассматриваем систему уравнений

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2, \quad x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + a + \frac{1}{2}b^2,$$

и находим ординату $(x_2)_{y^0}$ точки y^0 :

$$(x_2)_{y^0} = -\sqrt{a + \frac{1}{2}b^2}.$$

Теперь находим

$$\tau_{x^0 y^0} = (x_2)_{x^0} - (x_2)_{y^0} = b + \sqrt{a + \frac{1}{2}b^2},$$

$$\tau_{y^0 0} = (x_2)_{y^0} - (x_2)_{y^0} = \sqrt{a + \frac{1}{2}b^2},$$

$$T(a, b) = b + 2\sqrt{a + \frac{1}{2}b^2}.$$

Если точка $x^0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ лежит ниже линии переключения AOB , то (проверить!)

$$T(a, b) = -b + 2\sqrt{-a + \frac{1}{2}b^2}.$$

Окончательно,

$$T(a, b) = \begin{cases} b + 2\sqrt{a + \frac{1}{2}b^2}, & \text{если } x^0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ лежит выше линии } AOB, \\ -b + 2\sqrt{-a + \frac{1}{2}b^2}, & \text{если } x^0 \text{ лежит ниже } AOB. \end{cases} \quad (10)$$

Вид оптимальных траекторий для различных начальных точек x^0 показан на рис.13.6.

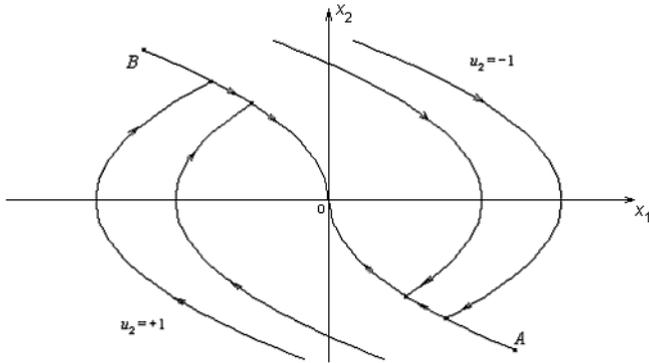


Рисунок 13.6.

Выпишем формулы для оптимального управления $u_2(t)$ и оптимальной траектории (в случае $x^0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ выше линии AOB):

$$u_2(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } 0 \leq t \leq \tau(a, b), \\ +1, & \text{если } \tau(a, b) < t \leq T(a, b), \end{cases} \quad (11)$$

$$\tau(a, b) = b + \sqrt{a + \frac{1}{2}b^2}, \quad T(a, b) = b + 2\sqrt{a + \frac{1}{2}b^2}.$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} a + bt + \int_0^t (t-s)u_2(s)ds \\ b + \int_0^t u_2(s)ds \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T(a, b).$$

Из рис.13.6 видим, что оптимальное управление

$$u_2 = v(x) = v(x_1, x_2) = \begin{cases} -1, & \text{если точка } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ лежит выше линии } AOB \text{ или на } AO, \\ +1, & \text{если точка } x^0 \text{ лежит ниже линии } AOB \text{ или на } BO. \end{cases} \quad (12)$$

Формулой (11) оптимальное управление определяется как функция времени t (или, как говорят, в *программной* форме, в форме программы). Формулой (12) оптимальное управление определяется как функция фазовых координат объекта (или, как принято говорить, в форме *синтеза* или в форме *обратной связи*). Знание управления в форме синтеза важно для построения оптимальных регуляторов. При подстановке управления (12) в уравнения движения объекта получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = v(x_1, x_2), \end{cases} \quad (13)$$

траектории которой изображены на рис. 13.6. Система (13) нелинейна. Для реализации управляемого движения с использованием синтезирующей функции $v(x_1, x_2)$ к объекту необходимо присоединить измерительные устройства для нахождения текущих значений фазового вектора $x = (x_1, x_2)$.

В заключение рассмотрим изохроны рассматриваемого управляемого объекта, т.е. линии уровня функции оптимального времени $T(x_1, x_2)$, определяемой формулой (10). Семейство изохрон определяется уравнением

$$T(x_1, x_2) = T, \quad (14)$$

где $T \geq 0$ — параметр. При $T = 0$ уравнению (14) удовлетворяет единственная точка $(0, 0)$. При $T > 0$ вид изохрон изображён на рис.13.7.

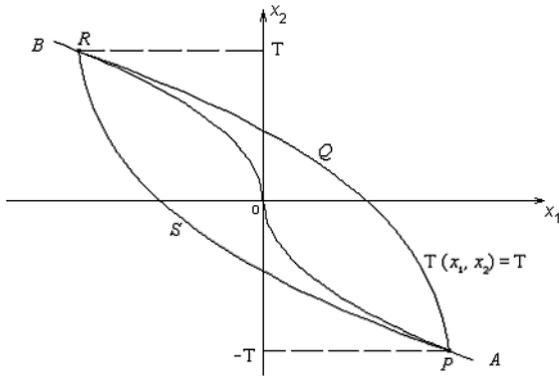


Рисунок 13.7.

Для всех точек x^0 , лежащих на линии $PQRS$, (рис.13.7), определяемой уравнением (14), оптимальное время перехода из x^0 в начало координат одинаково и равно T . Дуга PQR изохроны, лежащая выше линии переключения AOB , является частью параболы

$$x_1 = -\frac{(x_2 + T)^2}{4} + \frac{T^2}{2}, \quad (15)$$

ветви которой направлены влево, а вершина совпадает с точкой $P(\frac{T^2}{2}, -T)$, лежащей на линии AO . Дуга RSP изохроны, лежащая ниже линии переключения AOB , является частью параболы

$$x_1 = \frac{(x_2 - T)^2}{4} - \frac{T^2}{2}, \quad (16)$$

ветви которой направлены вправо, а вершина совпадает с точкой $R(\frac{T^2}{2}, T)$, лежащей на линии BO . Параболы (15) и (16) пересекаются в точках P и R , причем пересечение происходит под ненулевым углом. Изохрона $PQRS$ в точках P и R имеет изломы.

Упражнение 13.2. Получить уравнения (15), (16), привлекая (10), (14). Построить изохроны при $T = \frac{1}{2}, 2, 4$.

Упражнение 13.3. Доказать непрерывность функции $T(x_1, x_2)$, определяемой соотношением (10). Проверить, что функция $T(x_1, x_2)$ недифференцируема на линии переключения AOB .

Упражнение 13.4. Какая существует связь между изохронами и множествами управляемости?

Пример 13.2. Этот пример отличается от примера 13.1 только заданием множества $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Вид оптимальных траекторий в примере 13.2 показан на рис. 13.8, где AM_1B — линия переключения.

Упражнение 13.5. Построить для примера 13.2 функцию $T(x_1, x_2)$, равную оптимальному времени перехода из начальной точки (x_1, x_2) в конечную точку $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Является ли функция $T(x_1, x_2)$ непрерывной? Построить изохроны.

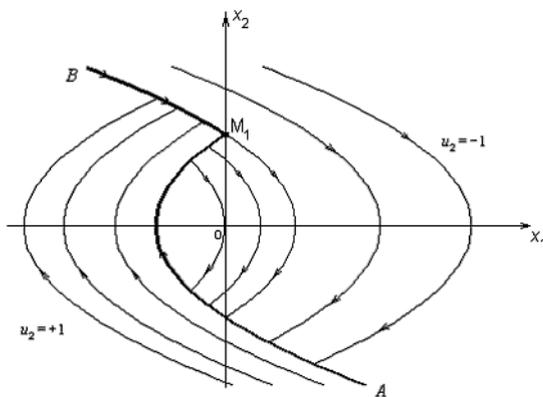


Рисунок 13.8.

Рассмотрим более подробно задачу перехода из начальной точки $C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ в конечную точку $M_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ за минимальное время (рис. 13.9).

Точка С лежит на параболе семейства (9), проходящей через точку $E \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, в которой линия переключения пересекает ось x_1 .

Для начальной точки С существуют две траектории, удовлетворяющие принципу максимума:

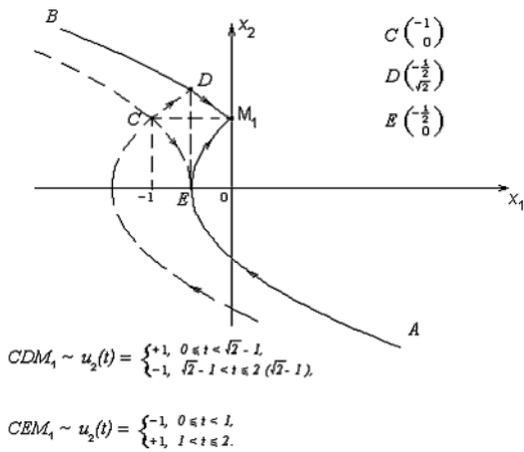


Рисунок 13.9.

Время перехода по траектории CDM_1 , равное $2(\sqrt{2}-1) \approx 0.82$, меньше времени перехода по траектории CEM_1 , равного 2. Оптимальной по быстродействию траекторией является траектория CDM_1 . Рассмотренный пример показывает, что выполнения принципа максимума, который, напомним, обоснован как необходимое условие оптимальности (§11), не всегда влечёт оптимальность. В §§14,15 проводится изучение достаточных условий оптимальности. Ценность принципа максимума не снижается и в тех случаях, когда пара $(x(t), u(t))$, удовлетворяющая принципу максимума, неединственна. Принцип максимума позволяет выделить, вообще говоря, отдельные траектории, из которых дополнительным анализом могут быть отобраны оптимальные. Так, в примере 13.2 с начальной точкой $C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ выделены траектории CDM_1 и CEM_1 , причём последняя оказалась неоптимальной.

Упражнение 13.6. Указать начальные точки x^0 в примере 13.2, для которых неединственна пара $(x(t), u(t))$, удовлетворяющая принципу максимума.

Пример 13.3. Найти оптимальное управление и оптимальную траекторию в линейной задаче быстродействия при

$$n = 2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = S_1(0), \quad M_0 = S_\pi \left(\begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad M_1 = S_\pi(0), \quad t_0 = 0, \text{ т.е. в задаче}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u_2, \\ u &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in U \equiv \{u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}, \\ x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

$$x(t_0) \in M_0, \quad x(t_1) \in M_1, \quad t_1 \rightarrow \min.$$

Здесь область управления U является кругом $S_1(0)$ радиуса 1 с центром в начале координат, множества M_0, M_1 являются

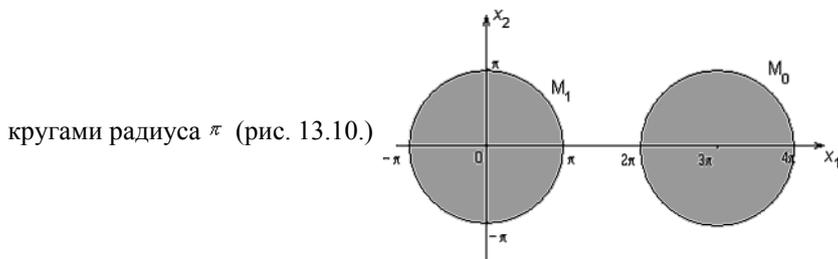


Рисунок 13.10.

Оптимальная пара

$$(x(t), u(t)), \quad 0 \leq t \leq t_1; \quad x(t_0) \in M_0, \quad x(t_1) \in M_1 \quad (18)$$

удовлетворяет принципу максимума Понтрягина

$$\text{а)} (u(t), \psi(t)) = c(U, \psi(t)), \quad t \in [0, t_1].$$

$$\text{б)} (x(t_0), \psi(t_0)) = c(M_0, \psi(t_0)),$$

$$\text{в)} (x(t_1), -\psi(t_1)) = c(M_1, -\psi(t_1)),$$

с некоторой сопряжённой переменной

$$\psi(t) = e^{-tA} \psi(0), \quad \psi(0) \in S. \quad (19)$$

Мы покажем, что пара (18), удовлетворяющая принципу максимума а), б), в), существует и единственна. Кроме того, будет описана процедура нахождения такой пары.

Выпишем опорные функции множеств U , M_0 , M_1 :

$$c(U, \psi) = \|\psi\|, \quad c(M_0, \psi) = 3\pi\psi_1 + \pi \|\psi\|, \quad c(M_1, \psi) = \pi \|\psi\|. \quad (20)$$

Привлекая первую из формул (20), запишем условие максимума а) в форме

$$(u(t), \psi(t)) = \|\psi(t)\|, \quad \|u(t)\| \leq 1,$$

откуда следует, что

$$u(t) = \frac{\psi(t)}{\|\psi(t)\|}. \quad (21)$$

Так как $\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right)$ в случае матрицы $A = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right)$ $\|\psi(t)\| = \|\psi(0)\|$ и $\psi(0) \in S$, то $\|\psi(t)\| = 1$, и формулу (21) можно записать в форме

$$u(t) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (22)$$

Подчеркнем, что момент времени $t_1 > 0$ нам неизвестен; начальная точка $x(0)$ и конечная точка $x(t_1)$ траектории $x(t)$ нам также пока не известны; неизвестна пока и сопряжённая переменная $\psi(t)$.

Из условия трансверсальности б) следует, что точка $x(0)$ лежит на границе круга M_0 и связана с вектором $\psi(0) \in S$ соотношением

$$x(0) = \begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} + \pi\psi(0). \quad (23)$$

Из условия трансверсальности в) следует, что точка $x(t_1)$ лежит на границе круга M_1 и связана с вектором $\psi(t_1) \in S$ соотношением

$$x(t_1) = -\pi\psi(t_1). \quad (24)$$

Геометрический смысл формул (23), (24) указан на рис. 13.11.

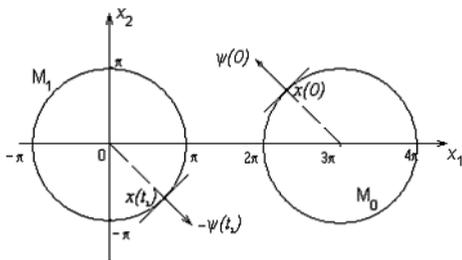


Рисунок 13.11.

Используя формулу Коши и соотношения (19), (22), (23), запишем траекторию $x(t)$ в форме

$$x(t) = e^{tA} \left(x(0) + \int_0^t e^{-Ms} u(s) ds \right) = \{(\text{формулы (19), (22), (23)})\}$$

$$e^{tA} \left\{ \begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} + \pi \psi(0) + \int_0^t e^{-sA} e^{-sA} \psi(0) ds \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{-sA} e^{-sA} = E \end{pmatrix} \right\}$$

$$e^{tA} \left\{ \begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} + (\pi + t) \psi(0) \right\} \quad (25)$$

в частности ,

$$x(t_1) = e^{t_1 A} \left\{ \begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} + (\pi + t_1) \psi(0) \right\}. \quad (26)$$

Запишем теперь условие (24), привлекая формулы (26) и (19):

$$e^{t_1 A} \left\{ \begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} + (\pi + t_1) \psi(0) \right\} = -\pi e^{-t_1 A} \psi(0). \quad (27)$$

Умножение равенства (27) на матрицу $e^{t_1 A}$ и приведение подобных членов дает

$$\begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} = -(2\pi + t_1) \psi(0). \quad (28)$$

Так как $\|\psi(0)\|=1$ и $t_1 > 0$, то сравнение модулей векторов, стоящих в левой и правой частях равенства (28), приводит к нахождению $t_1 : 3\pi = |2\pi + t_1|$, откуда

$$t_1 = \pi. \quad (29)$$

Из (28), (29) получаем, что

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Из формулы Коши (19) при $t = t_1$ с учетом (29), (30) находим

$$\psi(t_1) = e^{-t_1 A} \psi(0) = e^{-\pi A} \psi(0) = -E \psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Теперь по формулам (23), (24) находим начальную и конечную точку траектории $x(t)$:

$$x(0) = \begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} + \pi \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$x(t_1) = -\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (33)$$

по формуле (25) находим траекторию $x(t)$:

$$x(t) = e^{tA} \left(\begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} + (\pi + t) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = (2\pi - t) e^{tA} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2\pi - t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad (34)$$

и по формулам (22), (19) находим управление $u(t)$:

$$u(t) = \psi(t) = e^{-tA} \psi(0) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Таким образом, пара (18), удовлетворяющая принципу максимума, единственна и определяется формулами (34), (35), (29). Следовательно, найденная пара $(x(t), u(t))$, $0 \leq t \leq \pi$, оптимальна. Вид оптимальной траектории показан на рис. 13.12 жирной

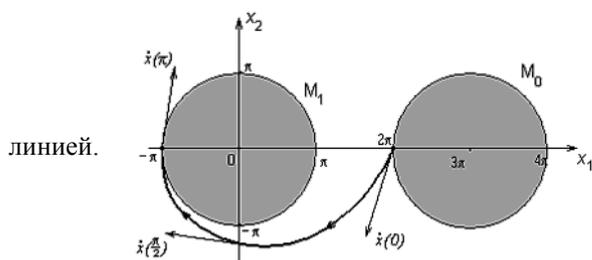


Рисунок 13.12.

При построении оптимальной траектории полезно учесть соотношения:

$$\begin{aligned} x(0) &= \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}, & \dot{x}(0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2\pi \end{pmatrix}, \\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -3\pi/2 \end{pmatrix}, & \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3\pi/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\pi/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ x(\pi) &= \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix}, & \dot{x}(\pi) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Итак, мы показали, решая пример 13.3, как может быть найдена пара (18), удовлетворяющая принципу максимума. Приведем сейчас другое решение этого же примера, опираясь на геометрические соображения. Мы знаем, что для рассматриваемого управляемого объекта множество достижимости $X(t) = X(0, t, M_0)$ является кругом (см. §10):

$$X(t) = S_{r(t)}(a(t)), \quad r(t) = \pi + t, \quad a(t) = 3\pi \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Круг $X(t)$ при $0 \leq t < t_1 = \pi$ не имеет общих точек с множеством M_1 , а при $t = t_1 = \pi$ множество достижимости $X(t)$ впервые коснется множества M_1 в точке $\begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$X(\pi) \cap M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Следовательно, $t_1 = \pi$ — оптимальное время, $x(t_1) = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix}$ — конечная точка оптимальной траектории; тогда, в силу условия трансверсальности в),

$$\psi(t_1) = -\frac{1}{\pi} x(t_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{далее, } \psi(0) = e^{-(0-t_1)A} \psi(t_1) = e^{\pi A} \psi(t_1) = -\psi(t_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

По найденному вектору $\psi(0)$ из условия трансверсальности б) находим $x(0) = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$. Нахождение оптимальной пары $(x(t), u(t))$ производится, как указано выше, см. (34), (35).

В заключение обратимся к геометрической интерпретации сопряженной переменной $\psi(t)$, множества достижимости $X(t) = X(0, t, M_0)$ и множества управляемости $Z(t) = Z(t, \pi, M_1)$:

$$X(t) = S_{\pi+t}(a(t)), \quad Z(t) = S_{2\pi-t}(0), \quad X(t) \cap Z(t) = \{x(t)\}.$$

Расположение этих множеств и вектора $\psi(t)$ указано на рис. 13.13.

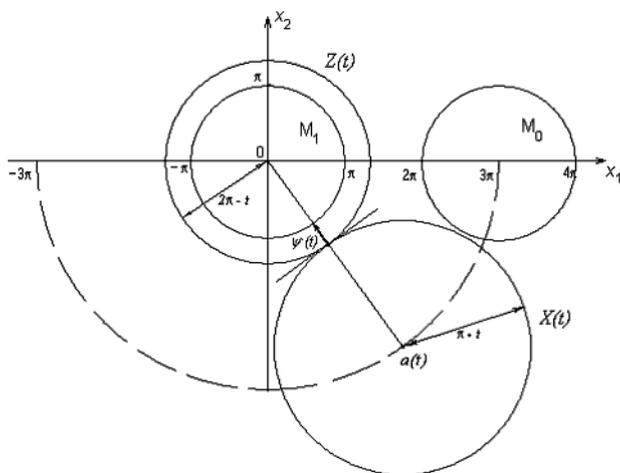


Рисунок 13.13.

Пример 13.4. Рассмотрим линейную задачу быстрогодействия при $n = 2$. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = S_{\mathbb{R}}(0)$, $M_0 = S_{\mathbb{R}_0} \left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} \right\}$, $t_0 = 0$, где

$R = \frac{a}{\pi}$, R_0 , a — положительные параметры,

$$2a^2 > R_0^2. \quad (36)$$

Условие (36) показывает, что круг M_0 не содержит точки M_1 .

Здесь множество достижимости

$$X(t) = S_{\mathbb{R}_0 + i\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} a \cos t \\ -a \sin t \end{pmatrix} \right), \quad t \geq 0,$$

— круг, причём точка M_1 оказывается на границе множества $X(t)$ в такие моменты времени $t > 0$, которые являются корнями уравнения

$$2a^2(1 - \sin t) = (R_0 + \frac{t}{\pi} \rho)^2. \quad (37)$$

На рис. 13.14 построены графики функций, стоящих в левой и правой частях уравнения (37).

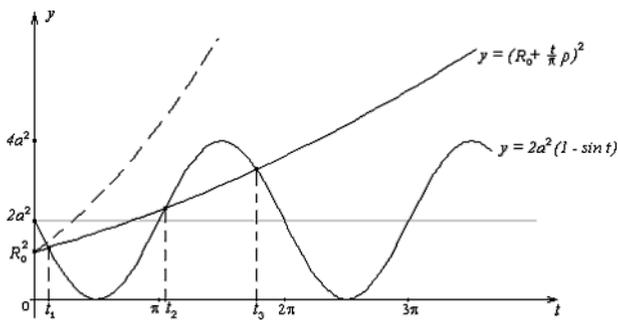


Рисунок 13.14.

При условии (36) уравнение (37) всегда имеет хотя бы один положительный корень. При достаточно больших значениях параметра ρ уравнение (37) имеет единственный положительный корень (см. пунктирную кривую на рис. 13.14). При уменьшении ρ у этого уравнения появляются другие положительные корни. Пусть t_1 — наименьший положительный корень уравнения (37). В момент времени t_1 множество достижимости $X(t)$ впервые захватывает точку M_1 : t_1 — оптимальное время в примере 13.4. Оптимальное решение может быть найдено по схеме, использованной в предыдущем примере.

Рассмотрим ситуацию когда уравнение (37) имеет несколько положительных корней. Например, при

$$\rho = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} \right) a, \quad R_0 = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} - 2 \right) a \quad (38)$$

уравнение (37) имеет ровно три положительных корня

$$t_1 = \frac{1}{3}\pi, \quad t_2 = \frac{5}{6}\pi, \quad t_3 \approx \frac{7}{4}\pi. \quad (39)$$

В этом случае множество достижимости впервые захватывает точку M_1 при $t = t_1$:

$$\begin{aligned} X(t) \cap M_1 &= \emptyset && \text{при } 0 \leq t < t_1, \\ X(t_1) \cap M_1 &= M_1 \neq \emptyset. \end{aligned}$$

При $t_1 < t < t_2$ точка M_1 расположена внутри круга $X(t)$. В момент времени t_2 множество достижимости $X(t)$ отрывается от точки M_1 :

$$\begin{aligned} X(t_2) \cap M_1 &= M_1 \neq \emptyset \\ X(t) \cap M_1 &= \emptyset && \text{при } t_2 < t < t_3. \end{aligned}$$

Наконец, в момент времени t_3 множество достижимости $X(t)$ опять накрывает точку M_1 и в дальнейшем точка M_1 лежит внутри $X(t)$:

$$X(t_3) \cap M_1 = M_1 \neq \emptyset$$

$$X(t) \cap M_1 = M_1 \neq \emptyset \quad \text{при } t_3 < t.$$

На рис. 13.15 показаны множества достижимости $X(t)$ при $t = t_1, t_2, t_3$.

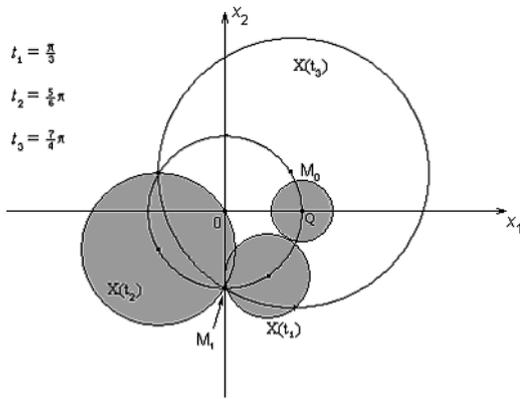


Рисунок 13.15.

Упражнение 13.7. Построить оптимальную пару $(x(t), u(t))$, $0 \leq t \leq t_1$, в примере 13.4.

Упражнение 13.8. Показать, что в случае (38), (39) на каждом из отрезков $[0, t_1], [0, t_2], [0, t_3]$ может быть построена пара $(x(t), u(t))$, удовлетворяющая принципу максимума. В каждом из этих случаев построить траекторию $x(t)$, соединяющую множества M_0 с M_1 .

Пример 13.5. Решить линейную задачу быстрогодействия при

$$n = 2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = S_1(0), \quad M_0 = S_\pi(0), \quad M_1 = S_\pi \left(\begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad t_0 = 0.$$

Этот пример отличается от [примера 13.3](#) только выбором множеств M_0, M_1 .

Найдём пару $(x(t), u(t))$, $0 \leq t \leq t_1$, удовлетворяющую принципу максимума с сопряжённой переменной $\psi(t)$, $\psi(0) \in S$. Из условия максимума а) следует, что

$$u(t) = \psi(t), \quad (40)$$

а из условий трансверсальности б), в) получаем

$$x(0) = \pi \psi(0), \quad (41)$$

$$x(t_1) = \begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} - \pi \psi(t_1). \quad (42)$$

Привлекая формулу Коши и соотношения (40), (41), получаем

$$x(t) = e^{tA} \left(x(0) + \int_0^t e^{-sA} u(s) ds \right) = (\pi + t) e^{tA} \psi(0), \quad (43)$$

в частности, при $t = t_1$ имеем:

$$x(t_1) = (\pi + t_1) e^{t_1 A} \psi(0). \quad (44)$$

Из (44), (42) получаем:

$$(\pi + t_1) e^{t_1 A} \psi(0) = \begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} - \pi e^{-t_1 A} \psi(0).$$

Отсюда с учетом равенства $e^{tA} = e^{-tA}$ следует, что

$$(2\pi + t_1) e^{t_1 A} \psi(0) = \begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Так как $\|\psi(0)\| = \|e^{t_1 A} \psi(0)\| = 1$, то из (45) вытекает, что $2\pi + t_1 = 3\pi$, т.е.

$$t_1 = \pi. \quad (46)$$

Из (45), (46) находим

$$\psi(0) = e^{-\pi A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Из (41), (42), (47) получаем начальную и конечную точки траектории $x(t)$:

$$x(0) = \pi \psi(0) = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x(t_1) = \begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} - \pi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец,

$$x(t) = (\pi + t)e^{tA}\psi(0) = (\pi + t) \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

$$u(t) = \psi(t) = e^{-tA}\psi(0) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq t_1 = \pi. \quad (48)$$

Итак, найдена пара $(x(t), u(t))$, $0 \leq t \leq t_1$, см.(48), удовлетворяющая принципу максимума. Эта пара единственна, и поэтому оптимальна. Оптимальная траектория $x(t)$ изображена жирной линией на рис. 13.16.

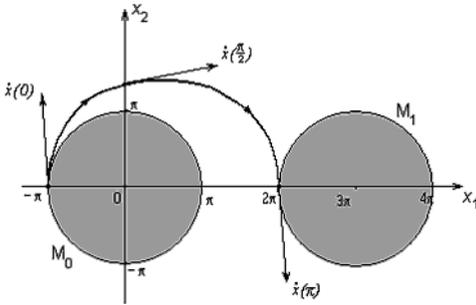


Рисунок 13.16.

При построении оптимальной траектории полезно учесть соотношения

$$x(0) = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \end{pmatrix},$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}, \quad \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x(\pi) = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\pi \end{pmatrix}.$$

Упражнение 13.9. Изучить динамику множества достижимости $X(t)$ в примере 13.2 и на этой основе дать геометрическое объяснение неоптимальности траектории CEM_1 , удовлетворяющей принципу максимума.

Пример 13.6. Решить линейную задачу быстрогодействия при $n = 2$. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = S_1(0)$, $M_0 = S_\pi(0)$, $M_1 = \{x_1 = 3\pi, |x_2| \leq \pi\}$, $t_0 = 0$.

Множество достижимости $X(t) = X(0, t, M_0) = S_{\pi+t}(0)$ впервые прикаснется к множеству M_1 в момент времени $t = t_1 = 2\pi$ в точке

$$x(t_1) = \begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{причем } \psi(t_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{рис. 13.17}).$$

Далее:

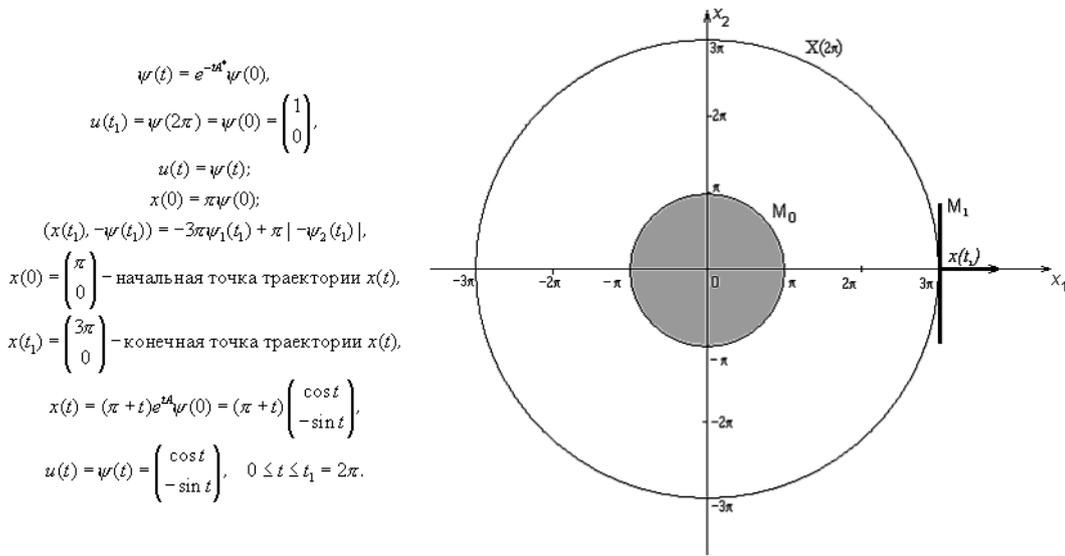


Рисунок 13.17.

Оптимальная траектория в примере 13.6 изображена на рис. 13.18;

$$x(0) = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix},$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3\pi/2 \end{pmatrix}, \quad \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -3\pi/2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$x(\pi) = \begin{pmatrix} -2\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2\pi \end{pmatrix},$$

$$x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5\pi/2 \end{pmatrix}, \quad \dot{x}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 5\pi/2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x(2\pi) = \begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3\pi \end{pmatrix}.$$

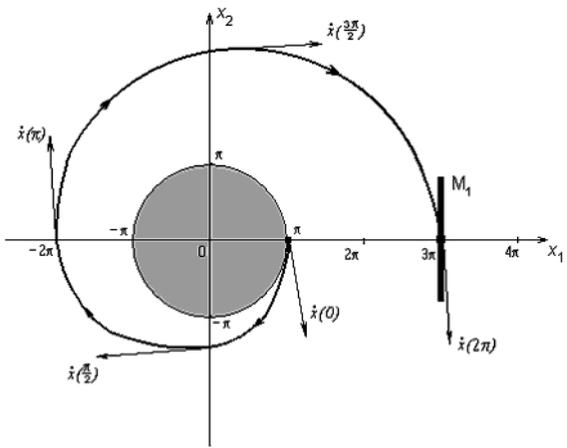


Рисунок 13.18.

В заключение рассмотрим в примере 13.6 геометрическую интерпретацию сопряжённой переменной $\psi(t)$, множества достижимости

$$X(t) \equiv X(0, t, M_0) = S_{\pi+t}(0)$$

и множества управляемости

$$Z(t) \equiv Z(t, t_1, M_1) = e^{(t-t_1)A} M_1 + \int_{t_1}^t e^{(t-s)A} (-Y) ds =$$

$$= e^{(t-2\pi)A} M_1 + S_{2\pi-t}(0) = e^{tA} M_1 + S_{2\pi-t}(0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

см. §11. При $t=0$ имеем:

$$\begin{aligned}
 X(0) &= S_{\pi}(0) = M_0, \\
 Z(0) &= M_1 + S_{2\pi}(0), \\
 X(0) \cap Z(0) &= \{x(0)\} = \left\{ \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\
 \psi(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{рис. 13.19}).
 \end{aligned}$$

При $t = \frac{\pi}{2}$ имеем:

$$\begin{aligned}
 X\left(\frac{\pi}{2}\right) &= S_{\frac{\pi}{2}}(0), \\
 Z\left(\frac{\pi}{2}\right) &= e^{\frac{\pi}{2}A} M_1 + S_{\frac{\pi}{2}}(0), \\
 X\left(\frac{\pi}{2}\right) \cap Z\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left\{ x\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3\pi/2 \end{pmatrix} \right\}, \\
 \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{рис. 13.20}).
 \end{aligned}$$

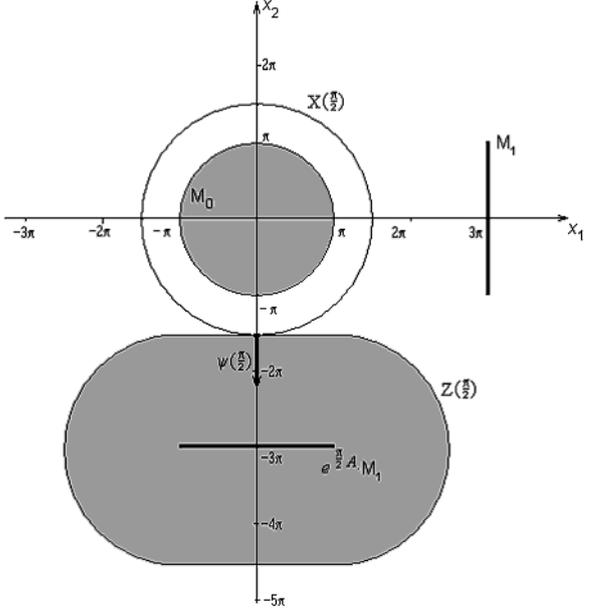
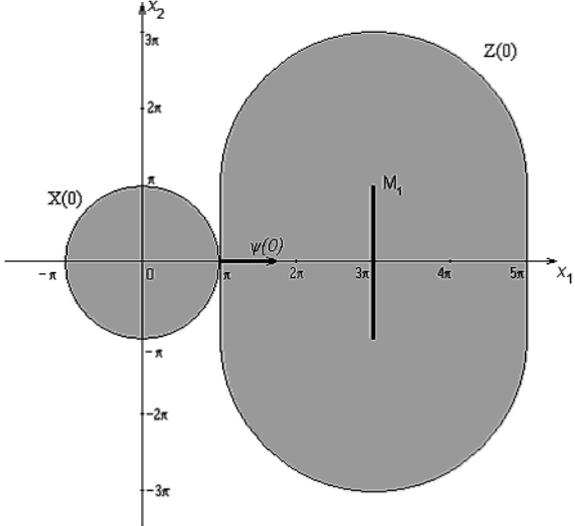


Рисунок 13.19.

Рисунок 13.20.

При $t = \pi$ имеем:

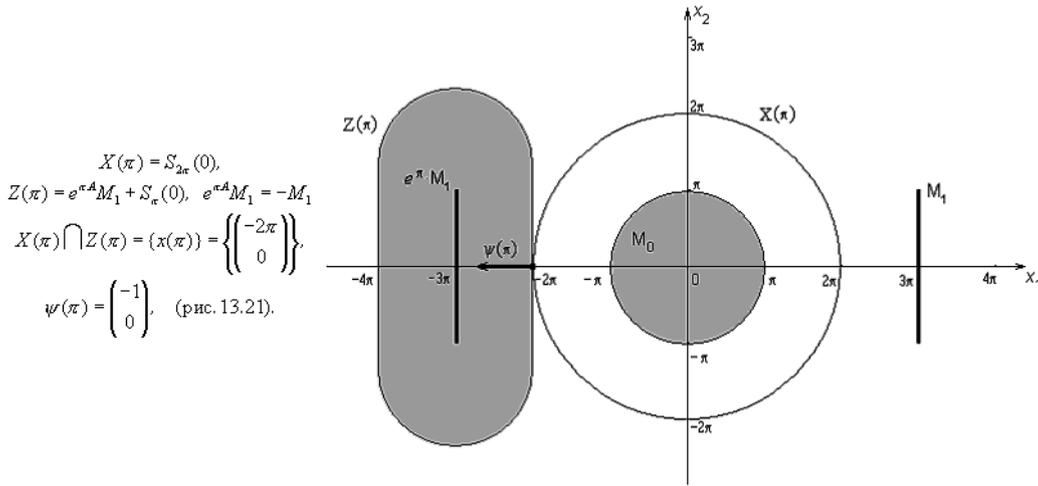
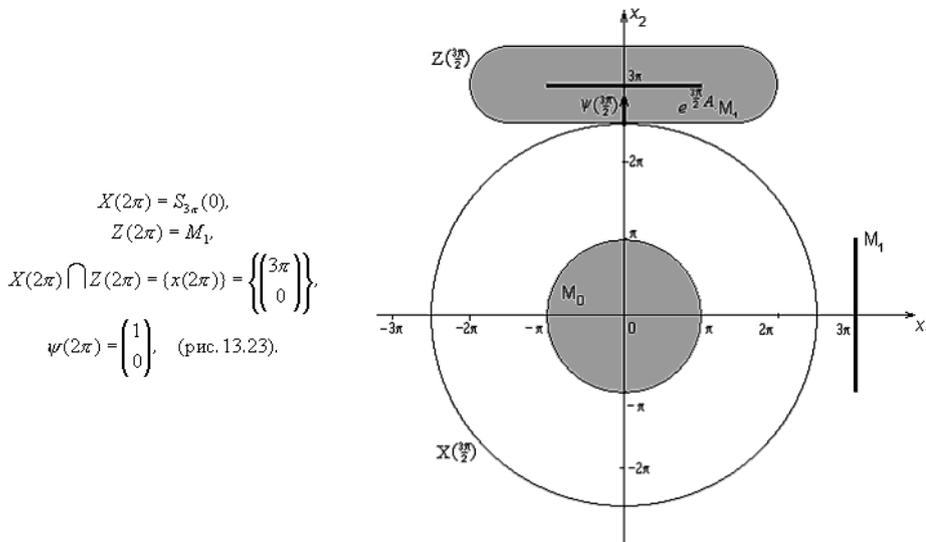


Рисунок 13.21.

При $t = \frac{3\pi}{2}$ имеем:

$X\left(\frac{3\pi}{2}\right) = S_{\frac{3\pi}{2}}(0),$
 $Z\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{\frac{3\pi}{2} A} M_1 + S_{\frac{3\pi}{2}}(0),$
 $X\left(\frac{3\pi}{2}\right) \cap Z\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left\{ x\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5\pi}{2} \end{pmatrix} \right\},$
 $\psi\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$ (рис. 13.22).

Наконец, при $t = 2\pi$ имеем:



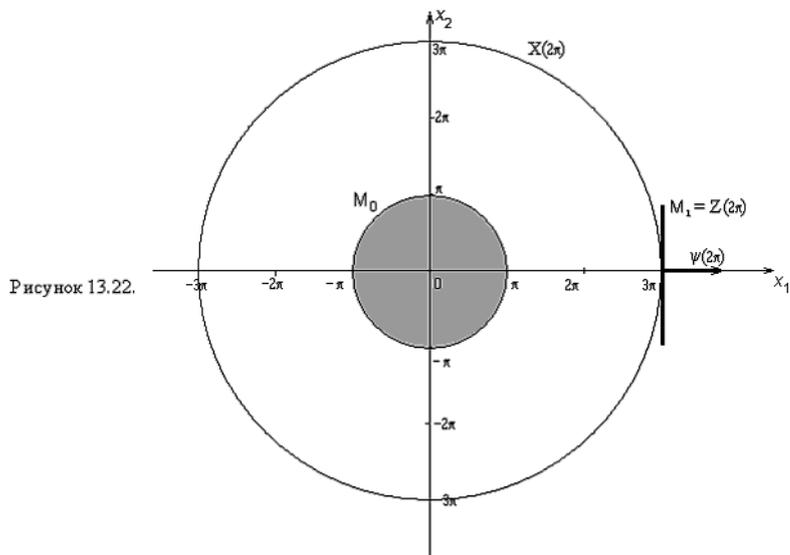


Рисунок 13.22.

Рисунок 13.23.

Лекция 11

§ 14. Достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума с усиленными условиями трансверсальности

В §11 доказана теорема о необходимых условиях оптимальности в форме максимума Понтрягина

$M_0, M_1 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n)$ пара $(x(t), u(t))$ оптимальна	\Rightarrow	пара $(x(t), u(t))$ удовлетворяет принципу максимума
---	---------------	--

Как показывают примеры (см. §13, [примеры 13.2, 13.4](#)), обратное утверждение неверно (т.е. пара $(x(t), u(t))$, удовлетворяющая принципу максимума, может оказаться неоптимальной). Поэтому важную роль играют теоремы о достаточных условиях оптимальности, в которых содержится утверждение о том, что выполнение принципа максимума плюс некоторых дополнительных условий гарантирует оптимальность рассматриваемой пары $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$. Роль упомянутых дополнительных условий заключается в том, что они не позволяют множеству достижимости $X(t)$ ранее момента времени t_1 пересекаться с множеством конечных состояний M_1 . Теоремы о достаточных условиях оптимальности не предполагают выпуклости компактов M_0, M_1 .

Теорема (о достаточных условиях оптимальности в форме принципа максимума с усиленными условиями трансверсальности)

Пусть

- $M_0, M_1 \in \Omega(\mathbb{E}^n)$;
- пара $(x(t), u(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке $[t_0, t_1]$ с сопряжённой переменной $\psi(t)$;
- с этой же сопряжённой переменной $\psi(t)$ выполняется неравенство (усиленное условие трансверсальности на множестве M_1):

$$(x(t), -\psi(t)) > c(M_1, -\psi(t)) \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (1)$$

Тогда пара $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, оптимальна по быстрдействию.

Доказательство

Условие (1) равносильно следующему

$$(x(t), \psi(t)) + c(M_1, -\psi(t)) < 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (2)$$

Так как пара $(x(t), u(t))$ удовлетворяет принципу максимума, то, привлекая формулу [\(12\) §11](#), условие (2) можно записать в виде

$$c(X(t), \psi(t)) + c(M_1, -\psi(t)) < 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (3)$$

Из условия (3) следует, что

$$X(t) \cap M_1 = \emptyset \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (4)$$

(применить первую часть [свойства 14 опорных функций, §5](#)). Условие (4) показывает, что объект неуправляем из M_0 в M_1 на любом отрезке $[t_0, t]$, где $t < t_1$. Так как $x(t_1) \in M_1$, $x(t_1) \in X(t_1)$, то $x(t_1) \in X(t_1) \cap M_1$, т.е.

$$X(t_1) \cap M_1 \neq \emptyset. \quad (5)$$

Соотношения (4), (5) доказывают оптимальность пары $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

Утверждение (4) вскрывает роль усиленного условия трансверсальности (1) в сочетании с принципом максимума. Принцип максимума без дополнительного условия (1) не может гарантировать выполнение геометрического условия (4) (см. [пример 13.4, §13](#)).

Приведем примеры применения теоремы о достаточных условиях оптимальности с усиленными условиями трансверсальности. Обратимся к [примеру 13.3, §13](#), в котором построена пара $(x(t), u(t))$, $0 \leq t \leq t_1$, удовлетворяющая принципу максимума с сопряжённой переменной $\psi(t)$:

$$x(t) = (2\pi - t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix},$$

$$u(t) = \psi(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

$$t_1 = \pi.$$

Левая часть неравенства (1) в этом примере

$$(x(t), -\psi(t)) = (2\pi - t)(\cos^2 t + \sin^2 t) = 2\pi - t,$$

а его правая часть —

$$c(M_1, -\psi(t)) = \pi \quad \|\psi(t)\| = \pi,$$

и, очевидно,

$$2\pi - t > \pi \quad \forall t < t_1 = \pi,$$

(рис. 14.1), т.е. выполнено усиленное условие трансверсальности (1);

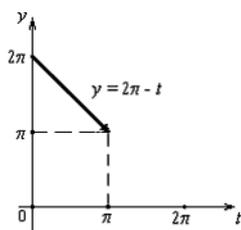


Рисунок 14.1.

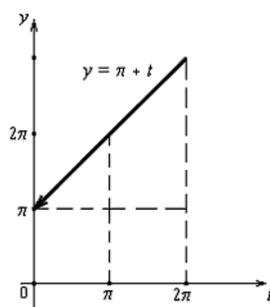


Рисунок 14.2.

следовательно, пара $(x(t), u(t))$, $0 \leq t \leq \pi$, оптимальна (в §13 вывод об оптимальности этой пары был сделан на основании других соображений).

Замечание 14.1. Утверждение рассмотренной выше теоремы сохраняется, если заменить условие (1) условием

$$(x(t), \psi(t)) > c(M_0, \psi(t)) \quad \forall t \in (t_0, t_1] \quad (6)$$

(усиленное условие трансверсальности на множестве M_0).

Действительно, условие (6) равносильно следующим:

$$c(M_0, \psi(t)) + (x(t), -\psi(t)) < 0,$$

$$c(M_0, \psi(t)) + c(Z(t), -\psi(t)) < 0,$$

$$M_0 \cap Z(t) = \emptyset,$$

$$\forall t \in (t_0, t_1].$$

Последнее соотношение вместе с условием $M_0 \cap Z(t_0) \neq \emptyset$ приводит к заключению об оптимальности пары $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

В некоторых примерах удобнее проверять условие (6) вместо условия (1). Обратимся к [примеру 13.5 §13](#), в котором построена пара $(x(t), u(t))$, $0 \leq t \leq t_1$, удовлетворяющая принципу максимума с сопряжённой переменной $\psi(t)$:

$$x(t) = (\pi + t) \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

$$u(t) = \psi(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

$$t_1 = \pi.$$

Проверим выполнение усиленного условия трансверсальности в форме (6):

$$(x(t), \psi(t)) = \pi + t,$$

$$c(M_0, \psi(t)) = \pi,$$

$$\pi + t > \pi \quad \forall t \in (0, \pi],$$

(рис.14.2). Следовательно, построенная в этом примере пара $(x(t), u(t))$, $0 \leq t \leq \pi$, оптимальна.

Аналогичным образом проверяется условие (6) в [примере 13.6 §13](#), где

$$x(t) = (\pi + t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix},$$

$$u(t) = \psi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix},$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 2\pi,$$

$$(x(t), \psi(t)) = \pi + t,$$

$$c(M_0, \psi(t)) = \pi,$$

$$\pi + t > \pi \quad \forall t \in (0, 2\pi).$$

§ 15. Локальная управляемость и её применения

В [§10](#) введено понятие управляемости объекта на заданном отрезке времени $[t_0, t_1]$ из множества M_0 в множество M_1 ; управляемость равносильна условию

$$X(t_0, t_1, M_0) \cap M_1 \neq \emptyset.$$

15.1. Локальная управляемость

Рассмотрим управляемый объект

$$\dot{x} = Ax + u; \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}_U; \quad M_1 \in \Omega(\mathbb{E}^n);$$

пусть $[t, t_1]$ — заданный отрезок времени, $t < t_1$.

Определение 15.1. Объект называется *локально управляемым* на заданном отрезке времени $[t, t_1]$ на множестве M_1 , если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любой точки $y \in M_1 + S_\varepsilon(0)$ объект является управляемым на отрезке времени $[t, t_1]$ из одноточечного множества $M_0 = \{y\}$ на множество M_1 . Другими словами, объект локально управляем на отрезке времени $[t, t_1]$ на множестве M_1 , если

$$\exists \varepsilon > 0: \quad M_1 + S_\varepsilon(0) \subset Z(t, t_1, M_1). \quad (1)$$

Это определение схематически иллюстрирует рис. 15.1.

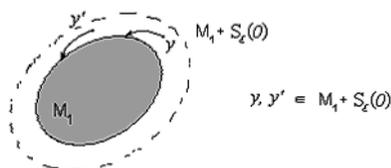


Рисунок 15.1.

Из определения локальной управляемости в форме (1) вытекает следующее необходимое условие локальной управляемости:

$$\exists \varepsilon > 0: \quad c(M_1, \psi) + \varepsilon \|\psi\| \leq c(Z(t, t_1, M_1), \psi) \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^n. \quad (2)$$

Из (2) следует, что

$$c(M_1, \psi) < c(Z(t, t_1, M_1), \psi) \quad \forall \psi \in S. \quad (3)$$

В случае выпуклости компакта M_1 условия (2) и (3) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями локальной управляемости (см. §5, свойство 11 опорных функций и следствие из этого свойства).

15.2. Теорема о достаточных условиях оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина с условием локальной управляемости

Теорема

Пусть

- $M_0, M_1 \in \Omega(\mathbb{E}^n)$;
- пара $(x(t), u(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке $[t_0, t_1]$;
- объект локально управляем на множестве M_1 на любом отрезке времени $[t, t_1]$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

Тогда пара $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, оптимальна.

Доказательство

Доказательство этой теоремы сводится к применению теоремы §14. По условию 3 данной теоремы (локальная управляемость) для любого $t \in [t_0, t_1]$

$$\exists \varepsilon > 0: M_1 + S_\varepsilon(0) \subset Z(t) \equiv Z(t, t_1, M_1).$$

Отсюда на основании первой части свойства 11 и свойства 5 опорных функций, §5, следует, что

$$c(M_1, \psi) + \varepsilon \|\psi\| \leq c(Z(t), \psi) \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^n. \quad (4)$$

Положим в (4) $\psi = -\psi(t)$, где $\psi(t)$ — та сопряжённая переменная, с которой пара $(x(t), u(t))$ удовлетворяет принципу максимума (см. условие 2 данной теоремы); в результате этого последовательно получаем

$$c(M_1, -\psi(t)) + \varepsilon \|\psi(t)\| \leq c(Z(t), -\psi(t)),$$

$$c(M_1, -\psi(t)) < c(Z(t), -\psi(t)) \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (5)$$

Привлекая лемму об эквивалентной формулировке принципа максимума (§11, п.11.5), перепишем условие (5) в форме

$$c(M_1, -\psi(t)) < (x(t), -\psi(t)), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Последнее условие совпадает с усиленным условием трансверсальности в форме (1), §14. Теперь утверждение данной теоремы об оптимальности пары $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, вытекает из теоремы §14 о достаточных условиях оптимальности с усиленным условием трансверсальности на множестве M_1 .

Доказанная теорема часто оказывается более удобной для практического применения при решении конкретных задач по сравнению с теоремой §14.

15.3. Локальная управляемость в начало координат

Рассмотрим частный случай множества конечных состояний объекта $M_1 = \{0\}$, состоящего из одной точки — начала координат пространства \mathbb{E}^n . Задача приведения объекта в начало координат часто встречается в приложениях. Условие локальной управляемости в начало координат на отрезке $[t, t_1]$ принимает следующий вид (см. (1)):

$$\exists \varepsilon > 0: S_\varepsilon(0) \subset Z(t, t_1, \{0\}). \quad (6)$$

Условие (6) можно представить в форме

$$0 \in \text{int } Z(t, t_1, \{0\}),$$

т.е. точка $0 \in \mathbb{E}^n$ является внутренней точкой множества управляемости $Z(t, t_1, \{0\})$ (рис. 15.2).

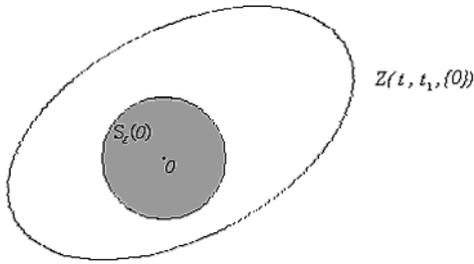


Рисунок 15.2.

В рассматриваемом случае $M_1 = \{0\}$ множество управляемости (см. §3) допускает следующее представление

$$Z(t, t_1, \{0\}) = \int_0^t e^{(t-s)A} (-Y) ds.$$

Поэтому вопрос о локальной управляемости в начало координат сводится к вопросу о том, является ли точка $0 \in E^n$ внутренней точкой множества, определяемого интегралом. В следующем п.15.4 излагаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы точка 0 была внутренней точкой интеграла при специальном виде множества U .

Этот результат позволяет получить удобные для практического применения достаточные условия локальной управляемости в начало координат (см. ниже п.15.5) и достаточные условия оптимальности в начало координат (см. п.15.6).

15.4. Лемма о внутренней точке интеграла

Лемма (о внутренней точке интеграла)

Пусть

- $U = \{-v, v\}$ (т.е. множество U состоит из двух точек: $-v$ и v);
- A — квадратная матрица порядка n ;
- множество X определяется интегралом:

$$X = \int_0^t e^{-sA} Y ds; \quad 0 < t; \quad Y = Y_U.$$

Тогда равносильны следующие два условия (I) и (II):

$$(I) \quad \boxed{0 \in \text{int } X} \Leftrightarrow \boxed{\text{векторы } v, Av, \dots, A^{n-1}v \text{ линейно независимы}} \quad (II) \quad (7)$$

Доказательство

При доказательстве леммы о внутренней точке интеграла используются два вспомогательных утверждения (леммы 1 и 2).

Лемма 1.

Равносильны следующие два условия (I) и (I'):

$$(I) \quad \boxed{0 \in \text{int } X} \Leftrightarrow \boxed{m > 0, \text{ где } m = \min_{\psi \in S} c(X, \psi)} \quad (I')$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (I) &\Leftrightarrow \boxed{\exists r > 0: S_r(0) \subset X} \Leftrightarrow \{ \text{теорема 6.2., следствие из свойства 11} \} \\ &\Leftrightarrow \boxed{\exists r > 0: r \|\psi\| \leq c(X, \psi) \quad \forall \psi \in E^n} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \boxed{0 < r \leq c(X, \psi) \quad \forall \psi \in S} \Leftrightarrow (I') \quad \boxed{m > 0} \end{aligned}$$

Лемма 2.

$$c(X, \psi) = \int_0^t |(e^{-sA} v, \psi)| ds \geq 0.$$

Действительно,

$$c(X, \psi) = c \left(\int_0^t e^{-sA} Y ds, \psi \right) = \{ \text{теорема 6.1., свойство 5 пар.5} \}$$

$$= \int_0^t c(U, e^{-sA} \psi) ds = \{ \text{пример 5, пар.5} \}$$

$$= \int_0^t |(v, e^{-sA} \psi)| ds = \int_0^t |(e^{-sA} v, \psi)| ds \geq 0.$$

В силу леммы 1 утверждение (7) леммы о внутренней точке интеграла равносильно утверждению

$$(I') \quad \boxed{m > 0} \Leftrightarrow (II) \quad (8)$$

Из леммы 2 следует, что $m \geq 0$; поэтому утверждение (8) будет доказано, если установить равносильность следующих утверждений (\bar{I}') и (\bar{II}) :

$$(\bar{I}') \quad \boxed{m = 0} \Leftrightarrow (\bar{II}) \quad \boxed{\text{векторы } v, Av, \dots, A^{n-1}v \text{ линейно зависимы}} \quad (9)$$

Докажем (9).

Сначала покажем, что $(\bar{I}') \Rightarrow (\bar{II})$. Если выполнено условие $(\bar{I}') m = 0$, то в силу непрерывности опорной функции

$$\exists \bar{\psi} \in \mathcal{S} : c(X, \bar{\psi}) = 0,$$

тогда, используя лемму 2, получаем

$$\int_0^t |(e^{-sA} v, \bar{\psi})| ds = 0.$$

В последнем интеграле подынтегральная функция неотрицательна и непрерывна, $t > 0$, поэтому

$$(e^{-sA} v, \bar{\psi}) = 0 \quad \forall s \in [0, t],$$

откуда дифференцированием по аргументу s получаем

$$(e^{-sA} Av, \bar{\psi}) = 0, \dots, (e^{-sA} A^{n-1}v, \bar{\psi}) = 0;$$

положив, наконец, здесь $s = 0$, приходим к равенствам

$$(v, \bar{\psi}) = 0, (Av, \bar{\psi}) = 0, \dots, (A^{n-1}v, \bar{\psi}) = 0,$$

которые можно записать в виде одного матричного равенства $(v, Av, \dots, A^{n-1}v)^* \bar{\psi} = 0, \bar{\psi} \in \mathcal{S}$. Следовательно, $\det(v, Av, \dots, A^{n-1}v) = 0$, т.е. векторы $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ линейно зависимы (выполнено условие (\bar{II})).

Докажем теперь, что $(\bar{II}) \Rightarrow (\bar{I}')$. Если выполнено условие (\bar{II}) (линейная зависимость векторов $v, Av, \dots, A^{n-1}v$), то

$$\exists \bar{\psi} \in \mathcal{S} : (v, \bar{\psi}) = (Av, \bar{\psi}) = \dots = (A^{n-1}v, \bar{\psi}) = 0. \quad (10)$$

Используя представление экспоненциала в виде конечной суммы

$$e^{-sA} = \sum_{j=0}^{n-1} p_j(s) A^j$$

с непрерывными коэффициентами $p_j(s)$ ([см. §2](#)), определение числа m , лемму 2 и равенства (10), получаем:

$$\begin{aligned} 0 \leq m &= \min_{\psi \in \mathcal{S}} c(X, \psi) \leq c(X, \bar{\psi}) = \int_0^t |(e^{-sA} v, \bar{\psi})| ds = \\ &= \int_0^t \left| \left(\sum_{j=0}^{n-1} p_j(s) A^j \right) v, \bar{\psi} \right| ds = \int_0^t \left| \sum_{j=0}^{n-1} p_j(s) (A^j v, \bar{\psi}) \right| ds = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует $m = 0$ (выполнение условия (\bar{I}')).

Итак, доказано утверждение (9); это влечет утверждение (8), которое равносильно утверждению (7) леммы о внутренней точке интеграла.

Замечание 15.1. Утверждение леммы о внутренней точке интеграла сохраняется для множеств

$$X = \int_0^{t_1} e^{-sA} y ds, \quad X = \int_0^{t_1} e^{(t-s)A} y ds; \quad t < t_1.$$

Следствие В случае области управления $U = \{-v, v\}$, $t < t_1$, объект локально управляется в начало координат на отрезке $[t, t_1]$ тогда и только тогда, когда векторы $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ линейно независимы.

15.5. Достаточные условия локальной управляемости в начало координат.

Теорема

Пусть

- $M_1 = \{0\}$;
- существует вектор $v \in \mathbb{E}^n$ такой, что $v \in U$, $-v \in U$, и векторы $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ линейно независимы.

Тогда объект локально управляем в начало координат на любом отрезке $[t, t_1]$, $t < t_1$.

Доказательство

Нужно доказать, что

$$\exists \varepsilon > 0: S_\varepsilon(0) \subset Z(t, t_1, \{0\}).$$

Имеем:

$$Z(t, t_1, \{0\}) = \int_t^{t_1} e^{(t_1-s)A} (-Y_U) ds \supset \int_t^{t_1} e^{(t_1-s)A} (-Y_{\{-v, v\}}) ds \supset S_\varepsilon(0), \quad \varepsilon > 0.$$

Последнее включение при некотором $\varepsilon > 0$ записано на основании леммы о внутренней точке интеграла и замечания к ней.

15.6. Теорема о достаточных условиях оптимальности в начало координат

Теорема

Пусть

- $M_0 \in \Omega(\mathbb{E}^n)$, $M_1 = \{0\}$;
- существует вектор $v \in \mathbb{E}^n$ такой, что $v \in U$, $-v \in U$ и векторы $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ линейно независимы;
- пара $(x(t), u(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке $[t_0, t_1]$.

Тогда пара $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, оптимальна.

Доказательство

На основании теоремы п. 15.5 объект локально управляем в начало координат на любом отрезке $[t, t_1]$, $t < t_1$. Оптимальность пары $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, вытекает из теоремы о достаточных условиях оптимальности в форме принципа максимума с условием локальной управляемости на множестве M_1 , [см. п. 15.2.](#)

Теоремы (п.15.5, п.15.6) очень удобны при решении конкретных примеров.

Пример 15.1. Рассмотрим линейную задачу быстрогодействия при

$$t_0 = 0, \quad n = 2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : u_1 = 0, |u_2| \leq 1 \right\}, \quad M_0 \in \Omega(\mathbb{E}^2), \quad M_1 = \{0\}.$$

В случае $M_0 = \{x^0\}$ этот пример подробно рассмотрен в §13, см. [пример 13.1](#). Исследуем вопрос о локальной управляемости объекта в начало координат, используя теорему о достаточных условиях локальной управляемости в начало координат (п.15.5). Имеем

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U, \quad -v \in U;$$

векторы $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $Av = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ линейно независимы. Следовательно, объект локально управляем в начало координат на любом отрезке $[t, t_1]$, $t < t_1$ (теорема п.5). На основании теоремы из п.15.6 в рассматриваемом примере пара $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, удовлетворяющая принципу максимума Понтрягина, оптимальна.

Аналогичные выводы имеют место для примера 15.1 (проверить самостоятельно) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что с помощью последних теорем, содержащих достаточные условия, не всегда удается обнаружить локальную управляемость и оптимальность для систем, фактически обладающих этими свойствами. Это замечание иллюстрирует следующий пример.

Пример 15.2. Рассмотрим задачу быстрогодействия

$$\dot{x} = u; \quad x, u \in \mathbb{E}^2; \quad U = S_1(0), \quad M_0 \in \Omega(\mathbb{E}^2), \quad M_1 = \{0\}.$$

Выясним вопрос о локальной управляемости в начало координат. Здесь матрица $A=0$, поэтому векторы v, Av линейно зависимы при любом векторе v , теорема п. 15.5 неприменима (теорема п. 15.6 также неприменима). Рассматриваемый объект локально управляем в начало координат на любом отрезке $[t, t_1]$ $t < t_1$ см. (6), так как

$$Z(t, t_1, \{0\}) = S_{t \rightarrow t_1}(0).$$

В силу теоремы п. 15.6 в примере 15.2 любая пара $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, удовлетворяющая принципу максимума, оптимальна.

Лекция 12

§ 16. Задача синтеза в простейших примерах

С задачей синтеза мы встретились в §13 при разборе [примера 13.1](#). В §16 рассмотрим ряд других примеров.

Пример 16.1. Задача о наискорейшем успокоении маятника. Рассмотрим линейную задачу быстрогодействия при

$n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \{u_1 = 0, |u_2| \leq 1\}$, $M_0 = \{x^0\}$, $M_1 = \{0\}$, $x^0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $t_0 = 0$, т.е. следующую задачу

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u_2, \quad |u_2| \leq 1, \\ x_1(0) &= a, \quad x_2(0) = b, \quad (1) \\ x_1(t_1) &= 0, \quad x_2(t_1) = 0, \\ t_1 &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Мы знаем, что в этой задаче принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности (см. [§15, п. 15.6](#)).

Выпишем сопряжённую переменную

$$\psi(t) = e^{-At} \psi(0) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{10} \\ \psi_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{10} \cos t + \psi_{20} \sin t \\ -\psi_{10} \sin t + \psi_{20} \cos t \end{pmatrix},$$

где $\psi(0) = \begin{pmatrix} \psi_{10} \\ \psi_{20} \end{pmatrix} \neq 0$ — вектор начальных значений сопряжённой переменной. Вторую координату $\psi_2(t)$ сопряжённой переменной можно представить в форме

$$\psi_2(t) = -\|\psi(0)\| \sin(t - \varphi_0).$$

Точно так же, как и в [примере 13.1](#), используя принцип максимума, приходим к выводу, что

$$u_2(t) = \text{sign } \psi_2(t) = \text{sign}(-\sin(t - \varphi_0)).$$

Следовательно, оптимальное управление $u_2(t)$ является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения 1 и -1, причем расстояние между соседними точками переключения равно π , (рис. 16.1).

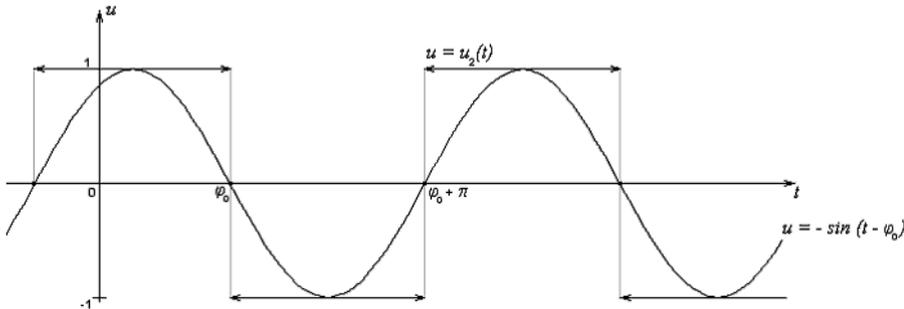


Рисунок 16.1.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1; \end{aligned} \quad (2)$$

фазовые траектории этой системы, представленные на рис. 16.2, являются окружностями с центром в начале координат, движение по которым происходит в направлении часовой стрелки, причём один оборот фазовая точка выполняет за время,

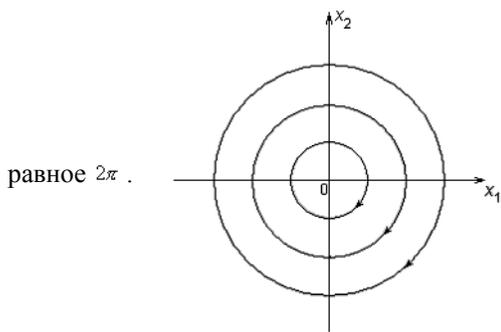


Рисунок 16.2.

Фазовые траектории системы (1) при $u_2 = 1$, т.е. системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 1. \end{cases} \quad (3)$$

изображены на рис. 16.3.а); они получены переносом траекторий системы (2) на 1 вправо. Фазовые траектории системы (1) при $u_2 = -1$, т.е. системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 1. \end{cases} \quad (4)$$

изображены на рис. 16.3.б); они получены переносом траекторий системы (2) на 1 влево.

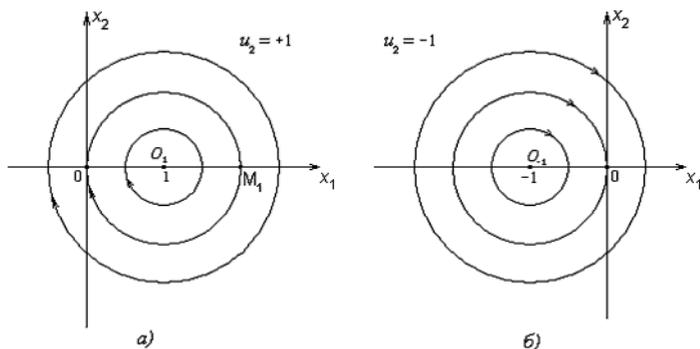


Рисунок 16.3.

Из рис. 16.3 ясно, что в начало координат при помощи управления $u_2 = 1$, удовлетворяющего принципу максимума, можно попасть из точек фазовой плоскости, заполняющих полуокружность M_1O с центром в точке $O_1(1,0)$. В случае управления $u_2 = -1$

эти точки заполняют полуокружность N_1O с центром в точке $O_2(-1,0)$, (рис. 16.4).

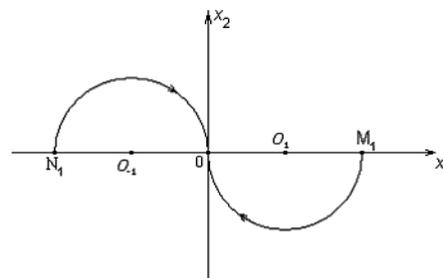


Рисунок 16.4.

Напомним, что длина интервала, на котором оптимальное управление сохраняет постоянное значение, не превосходит π . За время π по траекториям, изображенным на рис. 16.3, фазовая точка описывает полуокружность.

Выясним теперь вопрос о том, из каких точек фазовой плоскости возможен переход в начало координат при помощи оптимального управления с одной точкой переключения. Рассмотрим сначала управление

$$u_2(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq \tau, \\ +1, & \tau < t \leq t_1, \end{cases}$$

$$0 < \tau < \pi, \quad 0 < t_1 - \tau < \pi.$$

Такие начальные состояния x^0 заполняют область I_+ , ограниченную полуокружностями

M_1O , N_1O , N_1N_2 , $N_2P_1M_1$.

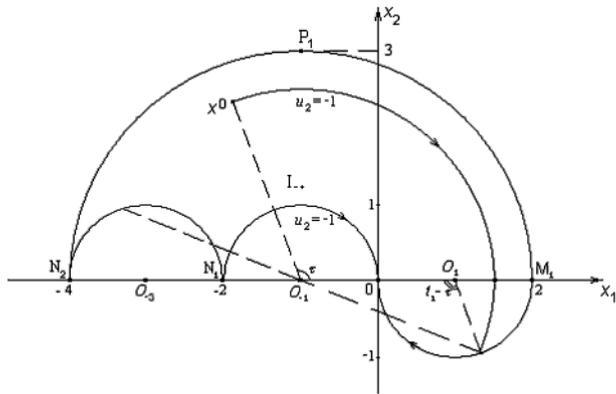
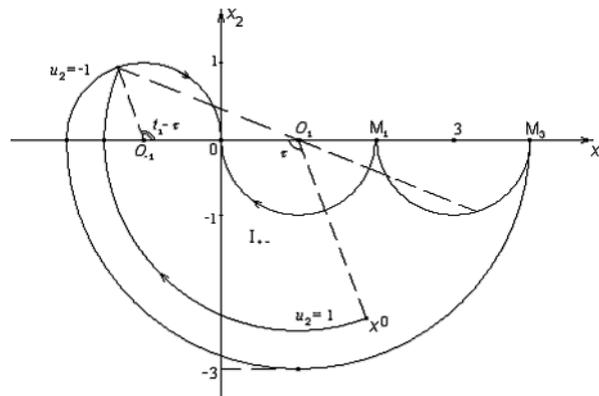


Рисунок 16.5.

Для управлений

$$u_2(t) = \begin{cases} +1 & 0 \leq t \leq \tau, \\ -1 & \tau < t \leq t_1, \\ 0 & 0 < \tau < \pi, \quad 0 < t_1 - \tau < \pi, \end{cases}$$



мы получаем область I_+ , (рис. 16.6).

Рисунок 16.6.

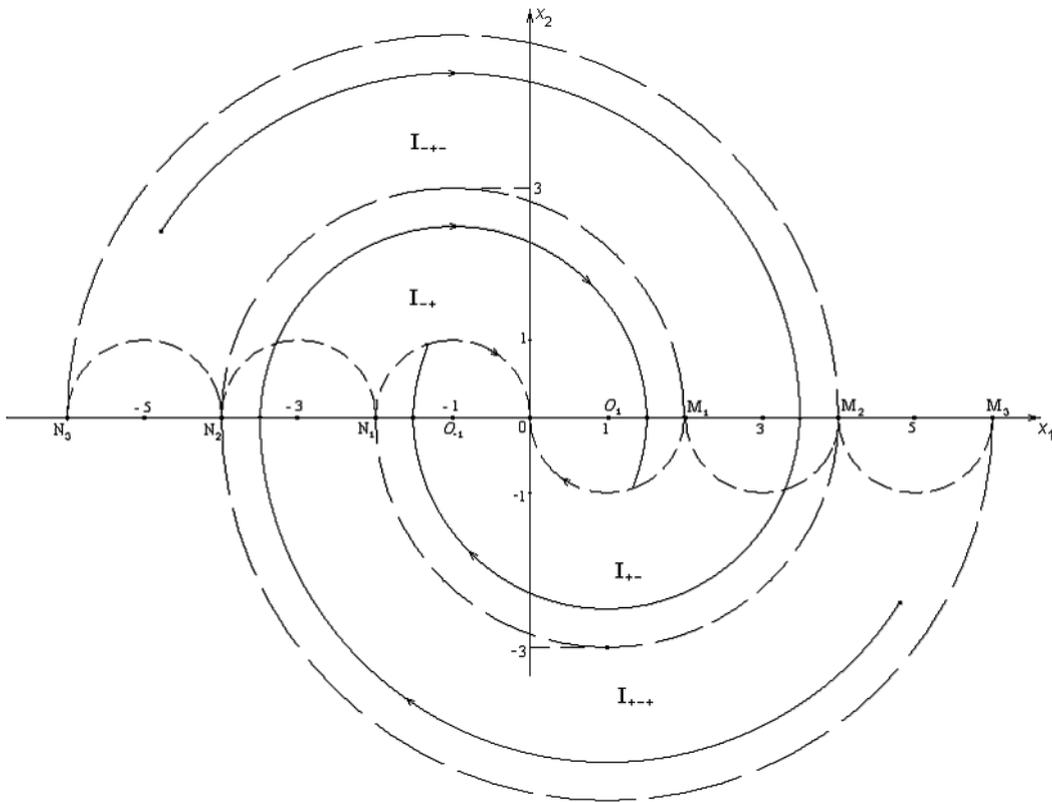


Рисунок 16.7.

Область I_{+-} отвечает управлениям вида

$$u_2(t) = \begin{cases} -1 & 0 \leq t < \tau_1, \\ +1 & \tau_1 < t < \tau_2 = \tau_1 + \pi, \\ -1 & \tau_2 < t \leq t_1, \end{cases}$$

$$0 < \tau_1 < \pi, \quad 0 < t_1 - \tau_2 < \pi;$$

область I_{+} отвечает управлениям вида

$$u_2(t) = \begin{cases} +1 & 0 \leq t < \tau_1, \\ -1 & \tau_1 < t < \tau_2 = \tau_1 + \pi, \\ +1 & \tau_2 < t \leq t_1, \end{cases}$$

$$0 < \tau_1 < \pi, \quad 0 < t_1 - \tau_2 < \pi;$$

(рис. 16.7).

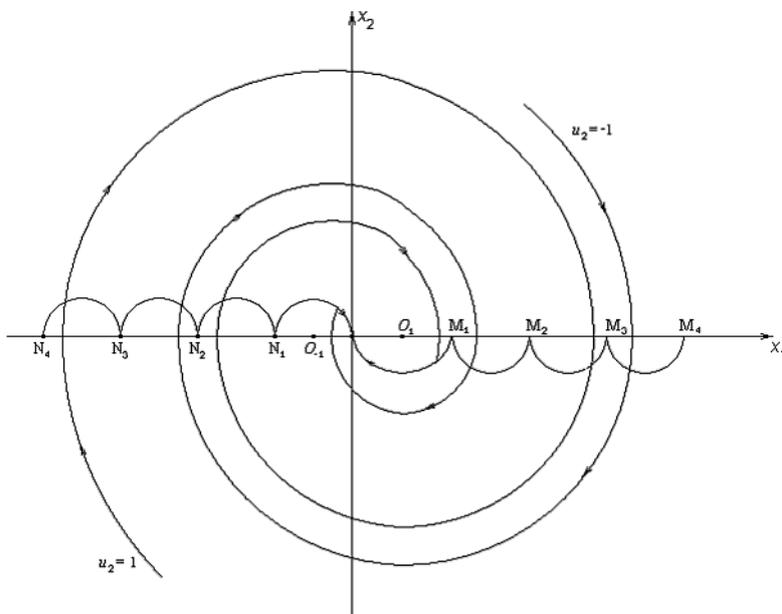


Рисунок 16.8.

Для описания окончательного результата на фазовой плоскости выделяется линия

$$...N_2N_2N_1OM_1M_2M_3...$$

называемая линией переключения. Определим функцию

$$v(x_1, x_2) = \begin{cases} -1 & \text{если точка } (x_1, x_2) \text{ лежит выше линии переключения} \\ & \dots N_2N_1OM_1M_2\dots \text{ или на кривой } N_1O; \\ +1 & \text{если точка } (x_1, x_2) \text{ лежит ниже линии переключения} \\ & \text{или на кривой } M_1O. \end{cases}$$

Любая оптимальная траектория состоит из дуг окружностей с центром в точке O_{-1} , лежащих выше линии переключения, где $u_2 = -1$, и из дуг окружностей с центром в точке O_1 , лежащих ниже линии переключения, где $u_2 = +1$. Функция $v(x_1, x_2)$ реализует синтез оптимального управления.

Переход в начало координат возможен из любой точки $x^0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ фазовой плоскости. Построенные траектории, удовлетворяющие принципу максимума, оптимальны по быстродействию, см. §15, пример 15.1. Пример 16.1 подробно рассмотрен в книге [1].

Упражнение 16.1. Построить семейство изохрон в примере 16.1.

Пример 16.2. Построить синтез в начало координат для объекта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \quad |u_2| \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

Особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что попадание в начало координат возможно не из любых начальных состояний x^0 фазовой плоскости, а лишь из начальных состояний, лежащих в полосе

$$|x_1 + x_2| < 1.$$

Рассматриваемая система (5) при $u_2 = 0$ принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1. \end{cases} \quad (6)$$

Система (6) имеет единственное положение равновесия $(0,0)$ типа седло (неустойчиво по Ляпунову). Фазовые траектории этой системы изображены на рис. 16.9.

На основании принципа максимума приходим к выводу, что управление $u_2(t)$, удовлетворяющее принципу максимума, принимает лишь значения ± 1 и имеет не более одной точки переключения. Оптимальные траектории рассматриваемой

системы склеиваются из траекторий системы (5) при $u_2 = +1$ и $u_2 = -1$.

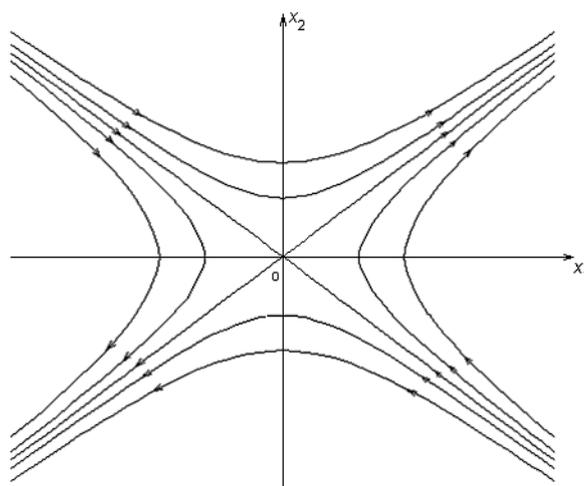


Рисунок 16.9.

Последние получаются из траекторий системы (5), изображенных на рис. 16.9, путем переноса положения равновесия в точки $(-1, 0)$ и $(+1, 0)$ соответственно. Окончательный вид оптимальных траекторий в примере 16.2 показан на рис. 16.10.

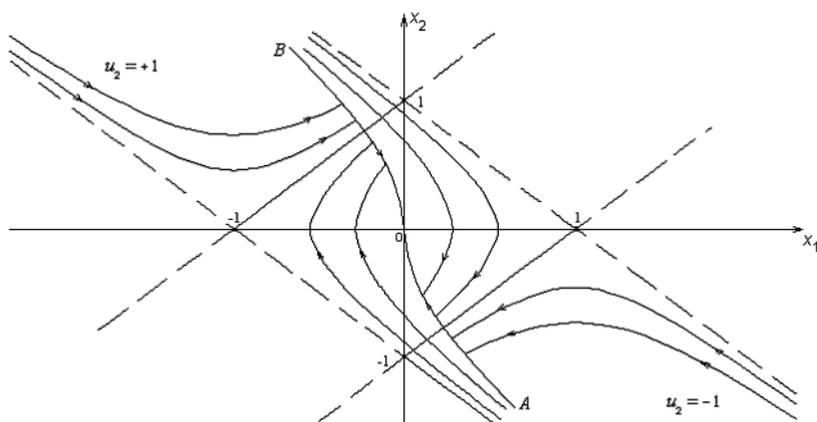


Рисунок 16.10.

Синтезирующая функция

$$v(x_1, x_2) = \begin{cases} -1 & \text{если точка } (x_1, x_2) \text{ лежит выше линии переключения} \\ & AOB \text{ в полосе } |x_1 + x_2| < 1 \text{ и на } BO, \\ +1 & \text{если точка } (x_1, x_2) \text{ лежит ниже линии переключения} \\ & AOB \text{ в полосе } |x_1 + x_2| < 1 \text{ и на } AO, \end{cases}$$

определена в полосе $|x_1 + x_2| < 1$.

Упражнение 16.2. Провести полное обоснование решения примера 16.2. Показать, что из любой точки x^0 фазовой плоскости, не принадлежащей полосе $|x_1 + x_2| < 1$, невозможно попасть в начало координат при помощи допустимого управления.

Упражнение 16.3. Построить семейство изохрон в примере 16.2.

Пример 16.3. Решить линейную задачу быстродействия

$$\dot{x} = u, \quad x, u \in E^n, \quad M_0 = \{x^0\}, \quad M_1 = \{0\}, \quad U = S_1(0), \quad t_0 = 0, \quad t_1 \rightarrow \min.$$

Показать, что оптимальное время

$$t_{\text{опт}} = \|x^0\|,$$

оптимальное управление

$$u_{\text{опт}}(t) = -\frac{x^0}{\|x^0\|}, \quad 0 \leq t \leq \|x^0\|,$$

а оптимальная траектория

$$x_{\text{опт}}(t) = \left(1 - \frac{t}{\|x^0\|}\right)x^0, \quad 0 \leq t \leq \|x^0\|.$$

Указать сопряжённую переменную, участвующую в формулировке принципа максимума.

При $n = 2$ на рис. 16.11 показаны оптимальные траектории, ведущие в начало координат.

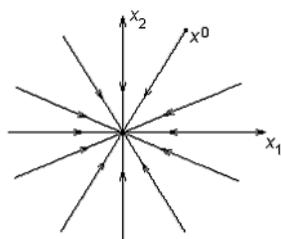


Рисунок 16.11.

Упражнение 16.4. Установить единственность оптимального управления в примере 16.3. Показать, что синтезирующая функция $v(x)$ определяется формулой

$$v(x) = -\frac{x}{\|x\|}.$$

Упражнение 16.5. Построить синтез в примерах

а) $\dot{x} = u$, $x, u \in \mathbb{E}^2$, $M_1 = S_1(0)$, $U = K \equiv \{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$;

б) $\dot{x} = u$, $x, u \in \mathbb{E}^2$, $M_1 = K$, $U = S_1(0)$;

в) $\dot{x} = u$, $x, u \in \mathbb{E}^2$, $M_1 = K$, $U = K$;

г) $\dot{x} = u$, $x, u \in \mathbb{E}^2$, $M_1 = S_1(0)$, $U = S_1(0)$.

Исследовать вопрос о единственности решения, провести обоснование оптимальности.

Лекция 13

§ 17. Теорема об опорной точке строго выпуклого компакта и градиенте его опорной функции. Теоремы единственности

Рассмотрим в пространстве E^n непустой выпуклый компакт $U \in \text{conv}\Omega(E^n)$. Этот компакт однозначно определяется своей опорной функцией

$$c(\psi) = \max_{u \in U} (\psi, u), \quad \psi \in E^n. \quad (1)$$

Возьмём любой отличный от нуля вектор $\psi^0 \in E^n$. Гиперплоскость

$$\Gamma_{\psi^0} = \{x \in E^n : (x, \psi^0) = c(\psi^0)\}$$

называется *опорной гиперплоскостью компакта U в направлении вектора ψ^0* . Множество

$$H_{\psi^0} = U \cap \Gamma_{\psi^0}$$

называется *опорным множеством компакта U в направлении вектора ψ^0* , см. рисунок 17.1.

Ясно, что

$$H_{\psi^0} = \{u \in U : (u, \psi^0) = c(\psi^0)\} \neq \emptyset, \quad (2)$$

то есть опорное множество H_{ψ^0} состоит из тех точек $u \in U$, на которых в соотношении (1) при $\psi = \psi^0$ достигается максимум.

Опорное множество H_{ψ^0} может состоять из одной точки, см. рис. 17.1.а); множество H_{ψ^0} , изображённое на рис. 17.1.б), состоит

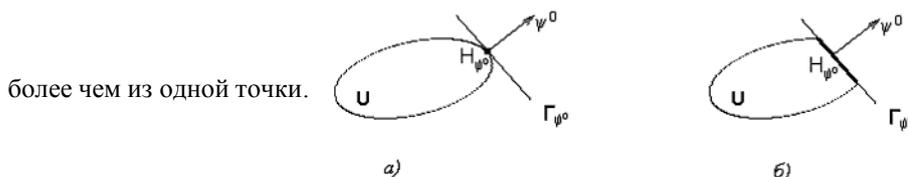


Рисунок 17.1.

Определение 17.1. Выпуклый компакт $U \in \text{conv}\Omega(E^n)$ называется *строго выпуклым в направлении ненулевого вектора $\psi^0 \in E^n$* , если опорное множество H_{ψ^0} компакта U состоит из единственной точки.

Определение 17.2. Выпуклый компакт $U \in \text{conv}\Omega(E^n)$ называется *строго выпуклым*, если он является строго выпуклым в направлении любого ненулевого вектора $\psi^0 \in E^n$.

Упражнение 17.1. Выяснить, какие из выпуклых компактов U являются строго выпуклыми:

- а) $U = \{u \in E^n : \|u\| \leq 1\} \equiv S_1(0)$ — единичный шар;
- б) $U = \{u = (u_1, u_2) \in E^2 : |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}$ — квадрат;
- в) $U = \{u \in E^n : u^* Q u \leq 1\}$ — компакт, ограниченный эллипсоидом, $Q = Q^* > 0$;
- г) $U = \text{conv}\{a, b\}$, $a, b \in E^n$ — отрезок, соединяющий точки a и b .

Задача нахождения опорного множества возникает, например, при использовании принципа максимума, и является некоторым элементом решения задачи оптимального управления. Во многих примерах с простым множеством U (отрезок, параллелепипед, шар и т.п.) задача нахождения опорного множества решается, исходя из наглядных геометрических соображений. Рассмотрим сейчас вопрос об аналитическом описании опорного множества H_{ψ^0} для строго выпуклого компакта. Эта теорема содержит аналитическое условие строгой выпуклости в терминах опорной функции $c(\psi)$ и конструктивное описание опорной точки при помощи градиента опорной функции.

Теорема 17.1.

Пусть $U \in \text{conv}\Omega(E^n)$, $c(\psi)$ — опорная функция выпуклого компакта U , H_{ψ^0} — опорное множество компакта U в направлении ненулевого вектора $\psi^0 \in E^n$.

А) Если в точке ψ^0 существует градиент $c'(\psi^0)$ опорной функции $c(\psi)$, то опорное множество H_{ψ^0} состоит из единственной точки h_0 , причём $h_0 = c'(\psi^0)$, то есть опорная точка h_0 совпадает с градиентом опорной функции в точке ψ^0 .

В) Если опорное множество H_{ψ^0} выпуклого компакта U состоит из единственной точки h_0 , то опорная функция $c(\psi)$ имеет в точке ψ^0 градиент $c'(\psi^0)$, причём $c'(\psi^0) = h_0$.

Доказательство

Докажем сначала утверждение А). Возьмём произвольную точку $u_0 \in H_{\psi^0}$ и докажем, что

$$u_0 = c'(\psi^0). \quad (3)$$

Этим будет закончено доказательство утверждения А). Чтобы установить (3), рассмотрим вспомогательную функцию

$$G(\psi) = c(\psi) - (\psi, u_0).$$

Она удовлетворяет условиям

$$G(\psi^0) = 0, \quad (4)$$

$$G(\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in E^n. \quad (5)$$

Равенство (4) вытекает из определения множества H_{ψ^0} , см. (2). Неравенство (5) следует из определения опорной функции, см. (1), так как $u_0 \in H_{\psi^0} \subset U$. Условия (4), (5) влекут $G(\psi) \geq G(\psi^0) \quad \forall \psi \in E^n$, то есть функция $G(\psi)$ имеет минимум в точке ψ^0 .

Кроме того, в точке ψ^0 функция $G(\psi)$ имеет градиент

$$G'(\psi^0) = c'(\psi^0) - u_0. \quad (6)$$

Необходимое условие минимума $G'(\psi^0) = 0$, в силу (6), приводит к равенству (3). Утверждение А) доказано.

Докажем теперь утверждение В) теоремы 17.1. Для этого сначала установим существование такого вектора $g \in E^n$, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{c(\psi^0 + \lambda x) - c(\psi^0)}{\lambda} = (x, g) \quad (7)$$

для любого вектора $x \in E^n$, причём

$$g = h_0 \quad (8)$$

(предел (7) есть производная опорной функции $c(\psi)$ в точке $\psi = \psi^0$ в направлении вектора x).

Возьмём любой вектор $x \in E^n$; так как $\psi^0 \neq 0$, то при достаточно малых $\lambda > 0$ вектор $\psi^0 + \lambda x$ отличен от нуля и определено опорное множество $H_{\psi^0 + \lambda x} \neq \emptyset$. Выберем в последнем множестве произвольную точку

$$u_\lambda \in H_{\psi^0 + \lambda x}. \quad (9)$$

По условию утверждения В) теоремы 17.1 $H_{\psi^0} = \{h_0\}$ и потому $u_\lambda|_{\lambda=0} = h_0$. Используя определение опорной функции (1), опорного множества (2) и учитывая выбор точек u_λ , см. (9), запишем соотношения

$$(\psi^0, u_\lambda) \leq c(\psi^0) = (\psi^0, h_0), \quad (10)$$

$$(\psi^0 + \lambda x, h_0) \leq c(\psi^0 + \lambda x) = (\psi^0 + \lambda x, u_\lambda). \quad (11)$$

Умножив (10) на минус единицу, перепишем его в форме

$$-(\psi^0, h_0) = -c(\psi^0) \leq -(\psi^0, u_\lambda).$$

Почленное сложение двух последних соотношений приводит к двойному неравенству

$$\lambda(x, h_0) \leq c(\psi^0 + \lambda x) - c(\psi^0) \leq \lambda(x, u_\lambda),$$

из которого получаем при $\lambda > 0$

$$0 \leq \frac{c(\psi^0 + \lambda x) - c(\psi^0)}{\lambda} - (x, h_0) \leq (x, u_\lambda - h_0). \quad (12)$$

Докажем теперь, что при $\lambda \rightarrow +0$

$$u_\lambda - k_0 \rightarrow 0. \quad (13)$$

Если допустить, что (13) неверно, то существуют число $\delta > 0$ и последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, $\lambda_k > 0$, $\lambda_k \rightarrow +0$ ($k \rightarrow \infty$), такие, что

$$\|u_{\lambda_k} - k_0\| \geq \delta > 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Последовательность u_λ ограничена, так как все $u_\lambda \in H_{\psi^0 + \lambda x} \subset U$, а U — компакт; поэтому из неё можно выделить сходящуюся к некоторой точке $v \in U$ подпоследовательность. Не меняя обозначений, будем считать, что сама последовательность u_λ сходится к точке v . Тогда, записав равенства

$$c(\psi^0 + \lambda_k x) = (\psi^0 + \lambda_k x, u_{\lambda_k})$$

и переходя в них к пределу при $k \rightarrow \infty$ ($\lambda_k \rightarrow +0$, $u_{\lambda_k} \rightarrow v$), в силу непрерывности опорной функции, приходим к равенству

$$c(\psi^0) = (\psi^0, v). \text{ Следовательно, } v \in H_{\psi^0} = \{k_0\}, \text{ и потому}$$

$$v = k_0. \quad (15)$$

Условия (14), (15) и $u_\lambda \rightarrow v$ при $k \rightarrow \infty$ противоречивы, что доказывает (13). Из (12), (13) следует (7), (8).

Остаётся показать, что существует градиент $c'(\psi^0)$ и $c'(\psi^0) = k_0$. Нам нужно показать, что приращение опорной функции можно записать в виде:

$$c(\psi^0 + \Delta\psi) - c(\psi^0) = (c'(\psi^0), \Delta\psi) + \bar{o}(\|\Delta\psi\|), \quad \|\Delta\psi\| \rightarrow 0.$$

Для этого достаточно показать, что

$$\Phi(\Delta\psi) \rightarrow 0 \quad \text{при } \|\Delta\psi\| \rightarrow 0, \quad (16)$$

где

$$\Phi(\Delta\psi) = \frac{c(\psi^0 + \Delta\psi) - c(\psi^0)}{\|\Delta\psi\|} - \left(k_0, \frac{\Delta\psi}{\|\Delta\psi\|} \right), \quad \|\Delta\psi\| > 0.$$

Предположим противное. Тогда найдутся: число $\varepsilon > 0$, последовательность $\{\Delta\psi_k\}$ ($\Delta\psi_k \neq 0$, $\|\Delta\psi_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$), номер K такие, что для $\forall k \geq K$ выполняется неравенство

$$|\Phi(\Delta\psi_k)| \geq \varepsilon > 0. \quad (17)$$

Введём обозначения:

$$\lambda_k = \|\Delta\psi_k\|, \quad x_k = \frac{\Delta\psi_k}{\|\Delta\psi_k\|} = \frac{\Delta\psi_k}{\lambda_k}.$$

Тогда $\lambda_k > 0$, $\lambda_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$; $x_k \in S$. В силу компактности единичной сферы S из последовательности $\{x_k\}$ можно выбрать сходящуюся к некоторой точке $\bar{x} \in S$ подпоследовательность. Без ограничения общности будем считать, что сама последовательность $x_k \rightarrow \bar{x}$, $k \rightarrow \infty$. Тогда, вводя дополнительные обозначения

$$\pi_k = \Phi(\Delta\psi_k) = \frac{c(\psi^0 + \lambda_k x_k) - c(\psi^0)}{\lambda_k} - (k_0, x_k),$$

$$r_k = \frac{c(\psi^0 + \lambda_k \bar{x}) - c(\psi^0)}{\lambda_k} - (k_0, \bar{x}),$$

имеем $r_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, в силу (7), (8). Кроме того, имеет место предельное соотношение

$$\pi_k - r_k = \frac{c(\psi^0 + \lambda_k x_k) - c(\psi^0 + \lambda_k \bar{x})}{\lambda_k} - (k_0, x_k - \bar{x}) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Действительно, опорная функция удовлетворяет условию Липшица по переменной ψ

$$|c(\psi') - c(\psi'')| \leq L \|\psi' - \psi''\| \quad \forall \psi', \psi'' \in E^n$$

с константой Липшица L , поэтому можно записать цепочку соотношений

$$|\pi_k - r_k| \leq \frac{L\lambda_k \|x_k - \bar{x}\|}{\lambda_k} + \|k_0\| \cdot \|x_k - \bar{x}\| = (L + \|k_0\|) \|x_k - \bar{x}\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Таким образом, установлено, что $r_k \rightarrow 0$ и $\pi_k - r_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, откуда с учётом соотношений

$$\pi_k = (\pi_k - r_k) + r_k, \quad |\pi_k| \leq |\pi_k - r_k| + |r_k|,$$

имеем: $\pi_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, что противоречит условию (17), которое может быть записано в виде: $|\pi_k| \geq \varepsilon > 0$ для $\forall k \geq K$.

Теорема 17.1 полностью доказана.

Следствие 17.1. Условие строгой выпуклости выпуклого компакта U в направлении вектора $\psi^0 \neq 0$ равносильно существованию в точке ψ^0 градиента $c'(\psi^0)$ опорной функции $c(\psi)$ компакта U .

Следствие 17.2. Выпуклый компакт U является строго выпуклым тогда и только тогда, когда существует градиент в любой точке $\psi \in E^n, \psi \neq 0$.

Замечание 17.1. Подчеркнём ещё раз важный для приложений конструктивный аспект теоремы 17.1. Рассмотрим уравнение

$$(\psi^0, u) = c(\psi^0),$$

содержащее ненулевой векторный параметр $\psi^0 \in E^n$, относительно неизвестной точки u из строго выпуклого компакта U . Это уравнение имеет единственное решение, определяемое формулой

$$u = c'(\psi^0).$$

Упражнение 17.2. Проверить справедливость равенства

$$(\psi, c'(\psi)) = c(\psi), \quad \forall \psi \neq 0,$$

(теорема Эйлера), используя свойство положительной однородности измерения 1 опорной функции $c(\psi)$.

Упражнение 17.3. Граница ∂U выпуклого компакта U допускает представление

$$\partial U = \bigcup_{\psi^0 \in S} H_{\psi^0}.$$

Для строго выпуклого компакта U имеет место следующее параметрическое описание границы:

$$\partial U = \{u \in E^n : u = c'(\psi), \psi \in S\}.$$

Здесь $S = \{\psi \in E^n : \|\psi\| = 1\}$ — единичная сфера.

Вернёмся к основной задаче нашего курса — линейной задаче быстродействия:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u, \\ x(t_0) \in M_0, \\ x(t_1) \in M_1, \\ t_1 - t_0 \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_0}. \end{cases}$$

Формулируемая ниже теорема 17.2 является тривиальным следствием [теоремы 17.1](#).

Теорема 17.2.

Пусть в задаче быстродействия множество M_0 строго выпукло и множество U также строго выпукло. Тогда для любого начального значения сопряжённой переменной $\psi(t_0) \in S$ соответствующая пара $u(t), x(t)$, удовлетворяющая принципу максимума на $[t_0, t_1]$, является единственной.

Доказательство последней теоремы данного раздела (теорема 17.3) можно найти в [11].

Теорема 17.3.

Пусть задано начальное значение $\psi(t_0) \in S$ и соответствующее решение $\psi(t) = e^{-(t-t_0)A} \psi(t_0)$ сопряжённой системы на отрезке времени $[t_0, t_1]$. Предположим, что опорная функция $c(M_0, \psi)$ является дифференцируемой по ψ в точке $\psi(t_0)$, то есть в этой

точке существует градиент функции $c(M_0, \cdot): E^n \rightarrow E^1$. Далее предположим, что для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ опорная функция $c(U, \psi)$ дифференцируема по ψ в точке $\psi(t)$. Тогда соответствующая пара $u(t), x(t)$, удовлетворяющая принципу максимума на $[t_0, t_1]$, является единственной.

Лекция 14

§ 18. Линейная задача быстродействия с гладкой областью управления

Обсудим вопрос о построении вычислительных методов нахождения оптимальных решений в линейных задачах быстродействия специального вида, имеющих гладкую область управления U . В 1 рассмотрены основные свойства этих задач.

Рассмотрим линейную задачу быстродействия

$$\dot{x} = Ax + u, \quad x|_{t=0} = x_0, \quad x_0 \neq 0; \quad x|_{t=T} = 0; \quad T \rightarrow \min \quad (1)$$

с гладкой областью управления $U \in \Gamma_3$ [7]. Предполагается, что из точки x_0 возможен перевод объекта в начало координат при помощи допустимого управления. Характерной чертой "гладкой" задачи (1) является непрерывность оптимального управления.

Пусть область управления U является выпуклым компактом, лежащим в пространстве E^n . Этот компакт однозначно определяется своей опорной функцией

$$c(\psi) = \max_{u \in U} (\psi, u), \quad \psi \in E^n. \quad (2)$$

Определим специальный класс Γ выпуклых компактов, которые будем называть *гладкими*.

Определение 18.1. Выпуклый компакт $U \in \Gamma$, если для опорной функции $c(\psi)$ компакта U выполнены следующие три предположения:

- Функция $c(\psi)$ имеет строго положительный минимум на единичной сфере $S = \{\psi \in E^n : \|\psi\| = 1\}$:

$$\min_{\psi \in S} c(\psi) > 0;$$

- Функция $c(\psi)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно при всех $\psi \in E^n, \psi \neq 0$;
- Ранг матрицы $c''(\psi)$ вторых производных функции $c(\psi)$ равен $n-1$ при всех $\psi \in S$;

$$c''(\psi) = (c_{ij}''(\psi))_{i,j=1}^n, \quad c_{ij}''(\psi) = \frac{\partial^2 c(\psi)}{\partial \psi_i \partial \psi_j}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Будем писать $U \in \Gamma_3$, если $U \in \Gamma$ и функция $c(\psi)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно при всех $\psi \neq 0$.

Упражнение 18.1. Пусть $n = 2$. Проверить, что выпуклый компакт $U = \left\{ u = (u_1, u_2) : \frac{u_1^2}{a_1^2} + \frac{u_2^2}{a_2^2} \leq 1 \right\}$, ограниченный эллипсом, принадлежит Γ, Γ_3 .

Упражнение 18.2. Показать, что эллипсоид

$$U = \{ u \in E^n : (u, Qu) \leq 1 \} \in \Gamma_3.$$

Здесь Q — симметричная положительно определенная матрица порядка n .

Упражнение 18.3. $\Pi 1 \Leftrightarrow 0 \in \text{int } U$.

Отсюда следует, что компакт $U \in \Gamma$ содержит точку $0 \in E^n$ в качестве внутренней точки.

Упражнение 18.4. Проверить, что $\forall \psi \in E^n, \psi \neq 0$

$$\psi c'(\psi) = c(\psi), \quad \psi c''(\psi) = 0;$$

ранг матрицы $c''(\psi) \leq n-1$.

Упражнение 18.5. Проверить, что уравнение

$$\psi u = c(\psi), \quad \psi \in E^n, \psi \neq 0,$$

относительно $u \in U, U \in \Gamma$, имеет единственное решение, определяемое формулой

$$u = c'(\psi).$$

Рассмотрим сопряжённое уравнение

$$\dot{\psi} = -\psi A$$

(мы считаем здесь вектор ψ строкой) и сопряжённую переменную

$$\psi(t, p) = p e^{-At},$$

$p = \psi(0, p)$ — начальное значение сопряжённой переменной при $t = 0$. Рассмотрим так называемое экстремальное управление $u(t, p)$, отвечающее сопряжённой переменной $\psi(t, p)$ и определяемое условием максимума а) §11:

$$\psi(t, p) u(t, p) = c(\psi(t, p)).$$

Отсюда следует (см. упражнение 17.5), что

$$u(t, p) = c'(\psi(t, p)).$$

Следовательно, оптимальное управление $u_0(t)$, $0 \leq t \leq T_0$, в задаче (1) допускает представление

$$u_0(t) = c'(\psi(t, p^0)), \quad 0 \leq t \leq T_0,$$

с некоторым вектором $p^0 \in S$. Вектор p^0 (начальное значение оптимальной сопряжённой переменной) и число $T_0 > 0$ (оптимальное время перехода из точки x_0 в начало координат) нам неизвестны. Можно показать, что в гладкой задаче быстрогодействия (1) вектор p^0 определяется единственным образом.

Таким образом, решение задачи (1) на основе принципа максимума сводится к нахождению параметров $p^0 \in S$ и $T_0 > 0$. Подставим экстремальное управление $u(t, p)$ в уравнение движения объекта и рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = Ax + u(t, p), \quad x|_{t=0} = x_0.$$

Её решение $x(t, p)$ выпишем с помощью формулы Коши

$$x(t, p) = e^{At} \left(x_0 + \int_0^t e^{-As} u(s, p) ds \right).$$

Нет оснований полагать, что при произвольно выбранном векторе p решение $x(t, p)$ когда-либо попадает в начало координат. Потребуем, чтобы

$$x(T, p) = 0, \quad p \in S, \quad T > 0.$$

Эти условия приводят к системе нелинейных уравнений

$$\xi(p, T) = x_0, \quad \|p\|^2 = 1 \quad (3)$$

относительно единичного вектора p и положительного числа T . Здесь

$$\xi(p, T) = - \int_0^T e^{-sA} c'(p e^{-sA}) ds$$

— n -мерная векторная нелинейная функция аргументов

$$p \in E^n \setminus \{0\}, \quad T > 0.$$

Пусть

$$p = p^0, \quad T = T_0 \quad (p^0 \in S, T_0 > 0) \quad (4)$$

— решение системы (3). Тогда в задаче (1)

- T_0 — оптимальное время,
- $u_0(t) = c'(p^0 e^{-At})$, $0 \leq t \leq T_0$, — оптимальное управление,
- $x_0(t) = x(t, p^0)$, $0 \leq t \leq T_0$, — оптимальная траектория.

Следует обратить внимание на то, что в задаче (1) принцип максимума является необходимым и достаточным условием оптимальности, так как объект локально упавляем в начало координат (проверить!).

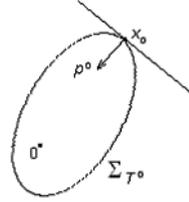
Итак, решение задачи быстрогодействия (1) на основе принципа максимума сводится к нахождению решения системы уравнений (3) относительно начального значения сопряжённой переменной p и оптимального времени T .

Ниже рассмотрены некоторые методы решения системы (3). Эти методы существенно используют специфику системы (3).

Укажем геометрическую интерпретацию решения p^0 , T_0 . Рассмотрим множество

$$\Sigma_T = \{x \in E^n : x = \xi(p, T), p \in S\}, T \geq 0,$$

которое называется *изохроной* (множество уровня оптимального времени перехода). Точка $x_0 \in \Sigma_{T^0}$, а вектор p^0 — единичный



вектор внутренней нормали к Σ_{T^0} в точке x_0 (рис. 18.1).

Рисунок 18.1.

Множество $V_T = \text{conv } \Sigma_T$, ограниченное изохроной Σ_T , обладает следующими свойствами:

- $V_T = \{0\}$ при $T = 0$,
- $V_T \subset V_{T'}$, $V_{T'} \neq V_T$ при $0 \leq T' < T''$ (монотонное разбухание множества V_T),
- $V_T \in \Gamma$ при $T > 0$.

С геометрической точки зрения решение системы (3) состоит в нахождении а) первого момента $T = T_0 > 0$ попадания точки x_0 на границу Σ_T множества V_T , б) единичного вектора p^0 внутренней нормали к Σ_{T^0} в точке x_0 .

Нахождение оптимальной пары (p^0, T_0) в линейной задаче быстродействия (1) можно трактовать как решение следующей краевой задачи принципа максимума

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + c'(\psi), & x|_{t=0} &= x_0, & x|_{t=T} &= 0, \\ \dot{\psi} &= -\psi A, & \psi|_{t=0} &= p \in S, \end{aligned} \right\} (5)$$

где $p \in S$ и $T > 0$ не заданы. Обратим внимание на то, что краевая задача (5) нелинейна за счет члена $c'(\psi)$.

§ 19. Некоторые численные методы решения линейной задачи быстродействия

Пусть $T_{\text{opt}} = T_0$ — оптимальное время, $p^{\text{opt}} = p^0$ — оптимальное начальное значения сопряжённой переменной:

$$\xi(p^0, T_0) = x_0, \|p^0\| = 1, T_0 > 0. (1)$$

Обсудим некоторые алгоритмы нахождения пары

$$p^{\text{opt}}, T_{\text{opt}}. (2)$$

19.1. Метод Ньютона решения системы уравнений

$$\xi(p, T) = x_0, \frac{1}{2} \|p\|^2 = \frac{1}{2}. (3)$$

Пусть p^k, T_k — некоторое приближение к точному решению системы (3): $\|p^k\| = 1, T_k > 0$. Полагая

$$p^{\text{opt}} = p^k + \Delta p, T_{\text{opt}} = T_k + \Delta T,$$

и производя линеаризацию системы уравнений (3), получаем линейную алгебраическую систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)_k \cdot \Delta p + \left(\frac{\partial \xi}{\partial T} \right)_k \cdot \Delta T &= x_0 - \xi_k \\ p^k \cdot \Delta p &= 0 \end{aligned} \right\} (4)$$

с неизвестными $\Delta p, \Delta T$. Здесь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi(p, T)}{\partial p} &= - \int_0^T e^{-sA} c''(p e^{-sA}) e^{-sA} ds, & \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)_k &= \left. \frac{\partial \xi(p, T)}{\partial p} \right|_{p=p^k, T=T_k}, \\ \frac{\partial \xi(p, T)}{\partial T} &= -e^{-TA} c'(p e^{-TA}), & \left(\frac{\partial \xi}{\partial T} \right)_k &= \left. \frac{\partial \xi(p, T)}{\partial T} \right|_{p=p^k, T=T_k}. \end{aligned}$$

С помощью утверждений [упражнения 17.4](#) могут быть установлены следующие соотношения

$$p \frac{\partial \xi(p, T)}{\partial p} = 0, \quad p \frac{\partial \xi(p, T)}{\partial T} = -c(p e^{-TA}) < 0; \quad (5)$$

ранг матрицы $\frac{\partial \xi(p, T)}{\partial p}$ равен $n-1 \quad \forall p \neq 0, T > 0; \quad a \frac{\partial \xi}{\partial p} q^* \leq 0, \quad q \in E^n$. Линейная система уравнений (4) имеет порядок $n+1$. Понизим её порядок на единицу. Умножение первого уравнения системы (4) слева на строку p^k приводит к определению ΔT :

$$\Delta T = \frac{p^k (\xi_k - x_0)}{c_k}, \quad c_k = c(p^k e^{-TA}) > 0. \quad (6)$$

Умножив второе уравнение системы (4) слева на столбец p^{k*} и вычитая из полученного уравнения первое уравнение системы (4), приходим к линейной системе уравнений относительно Δp

$$\left[p^{k*} p^k - \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)_k \right] \cdot \Delta p^* = (\xi_k - x_0) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial T} \right)_k \cdot \Delta T \quad (7)$$

с симметричной положительно определённой матрицей. Теперь полагаем

$$T_{k+1} = T_k + \Delta T, \quad p^{k+1} = \frac{p^k + \Delta p}{\|p^k + \Delta p\|}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Здесь ΔT определяется формулой (6), а Δp — решение линейной системы уравнений (7), имеющей порядок n . Итерационный процесс (8) представляет собой метод Ньютона для решения системы (3), отличающийся от классического метода Ньютона нормировкой переменной p , которая вводится в связи со специальным видом второго уравнения системы (3).

Как показывают численные эксперименты, метод (8) сходится не при всяком нулевом приближении, а в случае сходимости приводит к быстрому уточнению решения (квадратичная скорость сходимости). Поэтому весьма актуальной является задача получения "достаточно хорошего" нулевого приближения, которое можно уточнить методом (8). Для выработки нулевого приближения (8) используется ряд других методов.

19.2. Метод Нейштадта-Итона

Нахождение пары

$$p^{\text{opt}} = p^0, \quad T_{\text{opt}} = T_0$$

в этом методе сводится к задаче максимизации вводимой ниже функции $Z(p)$ конечного числа переменных $(p_1, \dots, p_n) = p \in E^n$ на множестве

$$D = \{p \in E^n : p x_0 < 0\}. \quad (9)$$

Оказывается, что оптимальное время T_0 равно максимальному значению функции $Z(p)$:

$$T_0 = \max_{p \in D} Z(p) = Z(p^0).$$

Рассматриваемый здесь метод Нейштадта-Итона является одним из возможных примеров решения экстремальной задачи

$$Z(p) \rightarrow \max_{p \in D}. \quad (10)$$

Функция $Z(p)$ определяется как положительный корень функции

$$\Phi(p, T) = p x_0 + \int_0^T c(p e^{-\tau A}) d\tau$$

по аргументу T . Мы покажем, что при $p \in D$ этот корень существует и определяется единственным образом.

Лемма 1.

$$\Phi(p, T) = p[x_0 - \xi(p, T)].$$

Лемма 2.

$$\Phi(p^0, T_0) = 0.$$

Лемма 3.

$$\frac{\partial \Phi(p, T)}{\partial T} = c(p e^{-TA}) > 0 \quad \forall p \neq 0, \quad \forall T > 0.$$

Таким образом, функция $f(T) = \Phi(p, T)$ является монотонно возрастающей функцией аргумента T и поэтому (при фиксированном $p \neq 0$) имеет не более одного корня.

Лемма 4.

Если функция $f(T) = \Phi(p, T)$, $p \neq 0$, имеет положительный корень $T = Z(p)$, то $p \in D$; кроме того, оптимальное значение $p^0 \in D$.

Лемма 5.

При каждом $p \in D$ функция $f(T) = \Phi(p, T)$ имеет единственный положительный корень $T = Z(p)$, причем

$$Z(p) \leq Z(p^0) = T_0 \quad \forall p \in D.$$

Лемма 6.

Функция $Z(p)$ положительно однородна измерения 0, т.е. $Z(\lambda p) = Z(p) \quad \forall p \in D, \quad \forall \lambda > 0$.

Из лемм 5, 6 следует, что

$$\max_{p \in D} Z(p) = \max_{p \in D_0} Z(p) = Z(p^0),$$

где $D_0 = D \cap S$, т.е. максимум функции $Z(p)$ на множестве D достигается на луче $L(p^0) = \{p \in E^n : p = \lambda p^0, \lambda > 0\}$.

Лемма 7.

При всех $p \in D \setminus L(p^0)$

$$Z(p) < Z(p^0) = T_0.$$

Оказывается, что функция $Z(p)$ при $p \in D$ имеет градиент $Z'(p)$, определяемый формулой

$$Z'(p) = \frac{1}{c(p^e - T_0)} [\xi(p, T) - x_0]_{T=Z(p)}.$$

Для решения экстремальной задачи (10) рассмотрим дифференциальное уравнение "подъема" по градиенту:

$$\frac{dp^*}{ds} = X(p), \quad X(p) = \xi(p, Z(p)) - x_0, \quad (11)$$

$$p|_{s=0} = q, \quad q \in D_0. \quad (12)$$

Правая часть уравнения (11) отличается от градиента $Z'(p)$ лишь положительным множителем. Каждая точка луча $L(p^0)$ является положением равновесия уравнения (11), и других положений равновесия в D это уравнение не имеет.

Теорема

Для любого $q \in D$

- решение $p(s, q)$ задачи Коши (11), (12) определено при всех $s \geq 0$;
- $p(s, q) \in D_0$ при всех $s \geq 0$;
- существует (и не зависит от q)

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} p(s, q) = p^0.$$

Имеется ряд дискретных аналогов описанного метода, один из которых называется методом Итона. В этих методах строится по определённым алгоритмам последовательность

$$(p^k, T_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

такая что

$$p^0 = -\frac{x_0^*}{\|x_0\|}, \quad \|p^k\| = 1, \quad p^k \in D, \quad T_k = Z(p^k), \quad T_k < T_{k+1}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} p^k = p^{\text{opt}}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T_{\text{opt}}.$$

Недостатком этих методов является медленная сходимость к оптимальному решению. Более подробно затронутые здесь проблемы описаны в [7].

19.3. Метод продолжения по параметру

Пусть p^0, T_0 — оптимальная пара ($\|p^0\| = 1, T_0 > 0$) — неизвестное решение нелинейной системы уравнений

$$\xi(p, T) = x_0, \quad \frac{1}{2} \|p\|^2 = \frac{1}{2}, \quad (13)$$

где x_0 — заданное начальное состояние управляемого объекта. Предположим, что нам известно решение \bar{p}^0, \bar{T}^0 ($\|\bar{p}^0\|=1, \bar{T}^0 > 0$) системы

$$\xi(p, T) = \bar{x}_0 - \frac{1}{2} \|p\|^2 = \frac{1}{2}, \quad (14)$$

отвечающее начальному состоянию $\bar{x}_0 \neq 0$ (точку \bar{x}_0 можно получить, выбрав \bar{p}^0, \bar{T}^0 , непосредственным подсчетом: $\bar{x}_0 = \xi(\bar{p}^0, \bar{T}^0)$). Соединим точки \bar{x}_0 и x_0 гладкой кривой L , определяемой уравнением

$$x = g(\varepsilon), \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1; \quad g(0) = \bar{x}_0; \quad g(1) = x_0; \quad g'(\varepsilon) \neq 0. \quad (15)$$

L может быть отрезком и в этом случае $g(\varepsilon) = \bar{x}_0 + \varepsilon(x_0 - \bar{x}_0)$, $\bar{x}_0 \neq x_0$. Предполагаем, что L не проходит через начало координат.

Рассмотрим систему уравнений

$$\xi(p, T) = g(\varepsilon), \quad \frac{1}{2} \|p\|^2 = \frac{1}{2}, \quad (16)$$

содержащую параметр $\varepsilon \in [0, 1]$. Решение

$$p(\varepsilon), \quad T(\varepsilon), \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \quad (\|p(\varepsilon)\|=1, \quad T(\varepsilon) > 0) \quad (17)$$

системы (16) существует, единственно, гладко зависит от параметра ε и удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi(p, T)}{\partial p} \frac{dp^*}{d\varepsilon} + \frac{\partial \xi(p, T)}{\partial T} \frac{dT}{d\varepsilon} &= g'(\varepsilon), \\ p \frac{dp^*}{d\varepsilon} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

неразрешённой относительно производных. Система (18) при сделанных предположениях об области управления U приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT}{d\varepsilon} &= -\frac{pg'(\varepsilon)}{c(p e^{-TA})}, \\ \frac{dp^*}{d\varepsilon} &= \left[p^* p - \frac{\partial \xi(p, T)}{\partial p} \right]^{-1} \left[-g'(\varepsilon) - \frac{pg'(\varepsilon)}{c(p e^{-TA})} \frac{\partial \xi(p, T)}{\partial T} \right], \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

разрешённой относительно производных. Обращаемая матрица в этой системе симметричная, положительно определённая. Для системы (19) известны начальные условия

$$p(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \bar{p}^0, \quad T(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \bar{T}^0. \quad (20)$$

Решая задачу Коши (19), (20) на отрезке $0 \leq \varepsilon \leq 1$, найдём функции (17), причём найденные функции при $\varepsilon=1$ дают искомое решение p^0, T^0 исходной системы (13):

$$p(\varepsilon)|_{\varepsilon=1} = p^0, \quad T(\varepsilon)|_{\varepsilon=1} = T^0.$$

Интегрирование задачи Коши (19), (20) на практике осуществляется численными методами, в результате чего искомое решение p^0, T^0 будет найдено приближённо с погрешностями, обусловленными неточностью решения задачи Коши (19), (20). Найденное приближённое решение можно уточнить другими методами, например, методом (8).

19.4. Метод проектирования начального состояния на изохрону

В основу этого метода положена описанная ниже наглядная геометрическая конструкция, связанная с рассматриваемой линейной задачей быстрогодействия. Пусть $x_0 \neq 0$ — заданное начальное состояние управляемого объекта, а p^0, T^0 — оптимальное начальное значение сопряжённой переменной и оптимальное время ($\|p^0\|=1, T^0 > 0$), подлежащие определению. Возьмем шар $S_r(x_0)$ с центром в точке x_0 радиуса $r, 0 < r \ll \|x_0\|$. Изохрона Σ_T при достаточно малых $T > 0$ не пересекается с шаром $S_r(x_0)$; при $T = T_0$ у них есть общая точка x_0 ; пусть $T = T(r)$ — первый момент встречи изохроны Σ_T с шаром $S_r(x_0)$: $\Sigma_{T(r)} \cap S_r(x_0) \neq \emptyset, \Sigma_T \cap S_r(x_0) = \emptyset$ при $0 \leq T < T(r)$.

Последнее множество $\Sigma_{T(r)} \cap S_r(x_0)$ состоит из единственной точки $y(r)$, которая является проекцией начального состояния x_0 на изохрону $\Sigma_{T(r)}$. Ясно, что (рис. 19.1)

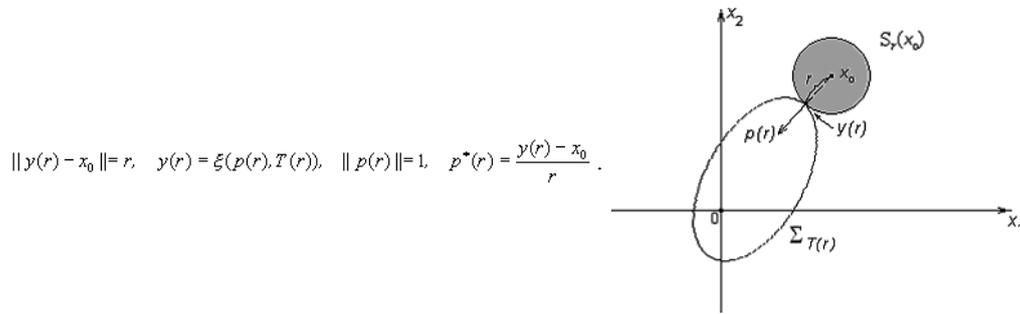


Рисунок 19.1.

$$\|y(r) - x_0\| = r, \quad y(r) = \xi(p(r), T(r)), \quad \|p(r)\| = 1, \quad p^*(r) = \frac{y(r) - x_0}{r}.$$

Функции $p(r), T(r)$ являются решением следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp^*}{dr} &= \left[rE - \frac{\partial \xi(p, T)}{\partial p} + p^* p \right]^{-1} \left[-p^* - \frac{1}{c(p e^{-rA})} \frac{\partial \xi(p, T)}{\partial T} \right], \\ \frac{dT}{dr} &= -\frac{1}{c(p e^{-rA})}, \end{aligned} \right\} (21)$$

и удовлетворяют начальным условиям

$$p^*|_{r=\|x_0\|} = -\frac{x_0}{\|x_0\|}, \quad T|_{r=0} = 0. \quad (22)$$

Действительно, дифференцируя по r тождество

$$r p^*(r) = \xi(p(r), T(r)) - x_0,$$

получаем

$$p^*(r) + r \frac{dp^*(r)}{dr} = \frac{\partial \xi}{\partial p} \frac{dp^*(r)}{dr} + \frac{\partial \xi}{\partial T} \frac{dT(r)}{dr}, \quad (23)$$

а условие $\|p(r)\| = 1$ дает

$$p(r) \frac{dp^*(r)}{dr} = 0. \quad (24)$$

Умножив (23) слева на строку $p^*(r)$, получаем второе уравнение системы (21); умножение уравнения (24) слева на столбец $p^*(r)$ и сложение полученного уравнения с уравнением (23) приводит к первому уравнению системы (21). Начальные условия (22) имеют простой геометрический смысл. Если проинтегрировать задачу Коши (21), (22) на отрезке $0 \leq r \leq \|x_0\|$ (справа налево), то её решение $p(r), T(r)$ позволяет найти оптимальную пару p^0, T_0 по формулам

$$p^0 = p(r)|_{r=0}, \quad T_0 = T(r)|_{r=0}. \quad (25)$$

При выполнении численного интегрирования задачи Коши (21), (22) возникают погрешности. Поэтому найденное описанным методом решение (25) будет содержать погрешности и его можно уточнить другими методами, например, методом (8).

19.5. Потенциальная форма метода проектирования

Если в задаче (21), (22) выбрать в качестве независимой переменной аргумент T и исключить параметр r , то приходим к задаче Коши

$$\frac{dp^*}{dT} = \left[\xi(p, T) - x_0 \left\| E - \frac{\partial \xi(p, T)}{\partial p} + p^* p \right\| \right]^{-1} \left[E - p^* p \right] \frac{\partial \xi(p, T)}{\partial T}, \quad p^*|_{T=0} = -\frac{x_0}{\|x_0\|}, \quad (26)$$

где неизвестная векторная функция $p(T) = (p_1(T), \dots, p_n(T))$ имеет размерность n . Дифференциальное уравнение проектирования (26) следует решать от значения $T = 0$ до такого положительного $T = T_0 > 0$, при котором величина $r = \| \xi - x_0 \|$ обращается в нуль. Уравнение (26), как мы видели, основывается на геометрической конструкции проектирования начального состояния x_0 на изохрону Σ_T ; эта геометрическая конструкция описывалась неявным уравнением

$$p^* - \frac{\xi(p, T) - x_0}{\| \xi(p, T) - x_0 \|} = 0 \quad (27)$$

относительно неизвестной функции $p = p(T)$, которая удовлетворяет условию нормировки $p(T) \in S$ и неравенству

$$\Phi(p, T) < 0, \quad 0 \leq T < T_0,$$

где функция $\Phi(p, T) = px_0 + \int_0^T c(p)e^{-cA} d\tau = p[x_0 - \xi(p, T)]$ уже встречалась выше (см. п.19.2). Уравнение (27) не имеет градиентной формы (его левая часть не может быть представлена как градиент (по аргументу p) некоторой функции).

Опишем сейчас градиентную форму конструкции проектирования. Введем функцию

$$V(p, T) = \frac{1}{2} \|p\|^2 - \ln[-\Phi(p, T)], \quad 0 \leq T < T_0, \quad (28)$$

которую будем называть *потенциалом*. При указанных значениях T функция (28) определена для всех векторов p , принадлежащих конусу

$$K(T) = \{p \in E^n : \Phi(p, T) < 0\}.$$

Конус $K(T)$, $0 \leq T < T_0$, содержит искомый вектор p^0 ; при $T \rightarrow T_0 - 0$ конус $K(T)$ стягивается к лучу $L(p^0) = \{p \in E^n : p = \lambda p^0, \lambda \geq 0\}$.

Выпишем градиент и матрицу вторых производных потенциала $V(p, T)$:

$$\begin{aligned} V'_p(p, T) &= p^* - \frac{\Phi'_p(p, T)}{\Phi(p, T)}, & \Phi'_p(p, T) &= x_0 - \xi(p, T); \\ V''_{pp}(p, T) &= E - \frac{\Phi''_{pp}(p, T)}{\Phi(p, T)} + \frac{\Phi'_p(p, T)\Phi'^*_p(p, T)}{\Phi^2(p, T)}, & \Phi''_{pp}(p, T) &= -\frac{\partial \xi(p, T)}{\partial p}; \\ V''_{pT}(p, T) &= \frac{1}{\Phi(p, T)} \frac{\partial \xi(p, T)}{\partial T} + \frac{c(p)e^{-cA}}{\Phi^2(p, T)} \Phi'_p(p, T). \end{aligned}$$

Матрица $V''_{pp}(p, T)$ является симметричной и положительно определённой в конусе $K(T)$. Функция $V(p, T) \rightarrow +\infty$ при стремлении точки $p \in K(T)$ к границе конуса $K(T)$ и при $\|p\| \rightarrow \infty$. Эта функция в конусе $K(T)$ имеет единственную точку минимума $p = p(T)$, которая удовлетворяет условию

$$V'_p(p(T), T) = p^* - \frac{x_0 - \xi(p, T)}{\Phi(p, T)} = 0. \quad (29)$$

Уравнение (29) — новая (градиентная) форма уравнения проектирования; мы будем использовать это уравнение, имеющее градиентную форму, вместо уравнения (27). Решение $p = p(T) \in K(T)$ уравнения (29) удовлетворяет условию нормировки $\|p\| = 1$ (проверить!).

Таким образом,

$$V'_p(p(T), T) = 0, \quad \forall T \in [0, T_0), \quad (30)$$

$$V(p(T), T) = \min_{q \in K(T)} V(q, T), \quad \forall T \in [0, T_0). \quad (31)$$

Соотношение (30) приводит к дифференциальному уравнению проектирования

$$V''_{pp}(p, T) \frac{dp^*}{dT} + V''_{pT}(p, T) = 0, \quad p^*|_{T=0} = -\frac{x_0}{\|x_0\|}, \quad (32)$$

которое записано с помощью потенциала (27). Роль уравнения (32) аналогична роли уравнения (26). Характерной особенностью задачи (32) является то, что её решения $p = p(T)$, принадлежащее конусу $K(T)$, обладает экстремальным свойством (31). Совместное использование задачи (32) (её численное интегрирование с большим шагом) и экстремального свойства (31) (минимизация потенциала $V(p, T)$ при фиксированном T в конусе $K(T)$ с целью устранения погрешности численного интегрирования задачи (32)) позволяет построить эффективные вычислительные процедуры для нахождения решения $p(T)$, которое при значениях T , близких к T_0 , $T < T_0$, доставляет весьма хорошее приближение к точному решению (p^0, T_0) рассматриваемой линейной задачи быстрого действия. Полученное приближение уточняется методом (8).

Затронутый в §§17, 18 круг вопросов более подробно обсуждается в [7].

Лекция 15

§ 20. Исследование терминальной задачи оптимального управления с линейной динамикой на фиксированном отрезке времени

При написании данного раздела авторы использовали материалы, любезно предоставленные С.М. Асеевым, профессором кафедры оптимального управления факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова.

Рассмотрим задачу оптимального управления с линейной динамикой на фиксированном отрезке времени $[t_0, t_1]$ со свободным правым концом $x(t_1) \in M_1 \equiv E^n$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u, \\ x(t_0) \in M_0 \in \Omega(E^n), \\ \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min_{u(\cdot) \in U} \end{cases} \quad (1)$$

Класс допустимых управлений \mathcal{U}_U состоит из всех измеримых на отрезке $[t_0, t_1]$ функций, причём $u(t) \in U$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$. Критерий качества в задаче (1) имеет так называемую *терминальную форму*: $J = \varphi(x(t_1))$, где $\varphi(\cdot) : E^n \rightarrow E^1$ — заданная функция. Простейшими примерами выбора терминальной функции $\varphi(\cdot)$ являются:

- 1) $\varphi(x) = \|x\|^2$;
- 2) $\varphi(x) = \|x - \alpha\|^2$, где $\alpha \in E^n$ — известный вектор;
- 3) $\varphi(x) = (a, x)$, где $a \in E^n$ — известный вектор;
- 4) $\varphi(x) = \max\{x_1, \dots, x_n\}$, где $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

Теорема 20.1. (теорема существования)

Пусть в задаче (1) $M_0 \in \Omega(E^n)$, $U \in \Omega(E^n)$, функция $\varphi(\cdot)$ определена и непрерывна в E^n . Тогда в классе допустимых управлений \mathcal{U}_U существует оптимальное управление для рассматриваемой задачи.

Доказательство

Очевидно, что класс допустимых управлений \mathcal{U}_U состоит из интегрируемых по Лебегу функций, принимающих значения из компакта U . Тогда по теореме об основных свойствах интеграла множество достижимости

$$X(t) \equiv X(t, t_0, M_0) = e^{(t-t_0)A} M_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} U ds$$

является непустым компактом для любого $t \in [t_0, t_1]$. В частности, $X(t_1) \in \Omega(E^n)$. Но тогда по теореме Вейерштрасса [12] (Ф.П. Васильев. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука. 1988.) функция $\varphi(x)$ достигает на множестве $X(t_1)$ своей точной нижней грани, то есть $\min_{x \in X(t_1)} \varphi(x)$ достигается. Управление, реализующее этот минимум, и является оптимальным.

Замечание 20.1. Теорема 20.1 остаётся справедливой и в предположении, что функция $\varphi(x)$ является полунепрерывной снизу в E^n . Напомним [12], что функция $\varphi(x)$, определённая на множестве $X \subset E^n$ называется полунепрерывной снизу в точке $x \in X$, если для любой последовательности $\{x_k\}$ точек из X , сходящейся к точке x , выполняется неравенство

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) \geq \varphi(x).$$

Функция $\varphi(x)$ называется полунепрерывной снизу на множестве X , если она полунепрерывна снизу в каждой точке этого множества. Тогда, используя соответствующую теорему Вейерштрасса [12], в силу компактности и непустоты множества достижимости, получаем утверждение теоремы 20.1.

Определение 20.1. Будем говорить, что пара $(u(t), x(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке $[t_0, t_1]$, если для векторной функции $\psi(t)$, которая является решением задачи Коши

$$\dot{\psi} = -A^* \psi, \quad \psi(t_1) = -\varphi'(x(t_1)), \quad (2)$$

выполнены следующие два условия:

а) $(u(t), \psi(t)) = c(U, \psi(t))$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$;

б) $(x(t_0), \psi(t_0)) = c(M_0, \psi(t_0))$ (условие трансверсальности на множестве M_0).

Разумеется, в рассматриваемой паре первый элемент $u(t)$ — допустимое управление, а второй элемент $x(t)$ — траектория, отвечающая этому управлению.

Лемма 20.1.

Пусть функция $\varphi(\cdot)$ непрерывно дифференцируема в E^n ; $X \subset E^n$ — выпуклое множество, $x_* \in X$ — точка глобального минимума функции $\varphi(\cdot)$ на множестве X , то есть $\varphi(x_*) = \min_{x \in X} \varphi(x)$, или

$$\varphi(x) - \varphi(x_*) \geq 0 \quad \forall x \in X. \quad (3)$$

Тогда имеет место неравенство

$$(\varphi'(x_*), x - x_*) \geq 0 \quad \forall x \in X. \quad (4)$$

Доказательство

Выберем произвольную точку $x \in X$. В силу выпуклости множества X отрезок $[x_*, x] \subset X$, т.е.

$$x_* + \lambda(x - x_*) \in X \quad \forall \lambda \in [0, 1]. \quad (5)$$

Из (3), (5) следует неравенство

$$\varphi(x_* + \lambda(x - x_*)) - \varphi(x_*) \geq 0,$$

которое на основании формулы Тейлора можно переписать в виде

$$\lambda(\varphi'(x_*), x - x_*) + \bar{o}(\lambda) \geq 0.$$

Выполнив почленное деление на $\lambda > 0$ и переходя к пределу при $\lambda \rightarrow +0$, отсюда получаем

$$(\varphi'(x_*), x - x_*) \geq 0 \quad \forall x \in X,$$

т.е. неравенство (4) установлено. Лемма 20.1 доказана.

Теорема 20.2. (Теорема о необходимых условиях оптимальности)

Пусть в задаче (1) $M_0 \in \text{conv } \Omega(E^n)$, $U \in \Omega(E^m)$, функция $\varphi(\cdot)$ непрерывно дифференцируема в E^n , пара $(u(t), x(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, решает задачу оптимального управления (1). Тогда пара $(u(t), x(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке $[t_0, t_1]$.

Доказательство

Множество достижимости $X(t_1)$ является выпуклым компактом. При доказательстве этой теоремы будут рассмотрены следующие два случая для правого конца траектории $x(t_1) \in X(t_1)$:

1) $x(t_1) \in \partial X(t_1)$,

2) $x(t_1) \in \text{int} X(t_1)$.

В первом случае $x(t_1) \in \partial X(t_1)$ при $\varphi'(x(t_1)) = 0$ задача Коши (2) имеет решение $\psi(t) \equiv 0$, при этом условия а) и б) Определения 20.1 очевидным образом выполняются. При $\varphi'(x(t_1)) \neq 0$ имеем $\psi(t_1) \neq 0$, и применение леммы 20.1 при $x_* = x(t_1)$, $X = X(t_1)$, $x \in X(t_1)$ даёт

$$(\varphi'(x(t_1)), x - x(t_1)) \geq 0 \quad \forall x \in X(t_1),$$

или

$$(-\varphi'(x(t_1)), x - x(t_1)) \equiv (\psi(t_1), x - x(t_1)) \leq 0 \quad \forall x \in X(t_1),$$

т.е. вектор $\psi(t_1)$ является опорным вектором к множеству достижимости $X(t_1)$ в его граничной точке $x(t_1)$. Это на основании леммы об эквивалентной формулировке принципа максимума влечет выполнение условий а) и б) Определения 20.1.

Наконец, во втором случае $x(t_1) \in \text{int} X(t_1)$ имеем $\varphi'(x(t_1)) = 0$; тогда задача Коши (2) имеет решение $\psi(t) \equiv 0$, при этом условия а) и б) Определения 20.1 очевидным образом выполняются.

Теорема 20.2 о необходимых условиях оптимальности в задаче (1) доказана

Лемма 20.2.

Для выпуклой непрерывно дифференцируемой в E^n функции $\varphi(\cdot)$ имеет место неравенство

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \geq (\varphi'(x_1), x_2 - x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in E^n. \quad (6)$$

Доказательство

На основании определения выпуклой функции имеет место неравенство

$$\varphi(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) \leq \lambda \varphi(x_2) + (1-\lambda)\varphi(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in E^n, \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Отсюда после элементарных преобразований получаем

$$\varphi(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)) \leq \varphi(x_1) + \lambda[\varphi(x_2) - \varphi(x_1)].$$

$$\frac{\varphi(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)) - \varphi(x_1)}{\lambda} \leq \varphi(x_2) - \varphi(x_1), \quad \lambda \in (0,1].$$

Применение формулы Тейлора даёт

$$(\varphi'(x_1), x_2 - x_1) + \frac{\bar{\sigma}(\lambda)}{\lambda} \leq \varphi(x_2) - \varphi(x_1),$$

откуда, выполняя предельный переход при $\lambda \rightarrow +0$, получаем неравенство (6).

Теорема 20.3. (Теорема о достаточных условиях оптимальности)

Пусть в задаче (1) $M_0 \in \text{conv} \Omega(E^n)$, $U \in \Omega(E^n)$, функция $\varphi(\cdot)$ — выпуклая непрерывно дифференцируемая в E^n , пара $(u(t), x(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке $[t_0, t_1]$. Тогда пара $(u(t), x(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, решает задачу оптимального управления (1).

Доказательство

Множество достижимости $X(t_1)$ является выпуклым компактом. При доказательстве этой теоремы будут рассмотрены два случая.

1) Пусть $\varphi'(x(t_1)) = 0$. Тогда применение неравенства (6) при $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x \in X(t_1)$ даёт

$$\varphi(x(t_1)) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in X(t_1),$$

что доказывает оптимальность исследуемого решения.

2) Пусть $\varphi'(x(t_1)) \neq 0$. Тогда, принимая во внимание то, что пара $(u(t), x(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке $[t_0, t_1]$ (см. Определение 20.1), получаем что вектор $\psi(t_1) = -\varphi'(x(t_1)) \neq 0$ является опорным вектором к множеству достижимости $X(t_1)$ в его граничной точке $x(t_1)$ на основании леммы об эквивалентной формулировке принципа максимума, то есть выполняется неравенство

$$(\psi(t_1), x - x(t_1)) \leq 0 \quad \forall x \in X(t_1),$$

или

$$(\varphi'(x(t_1)), x - x(t_1)) \geq 0 \quad \forall x \in X(t_1).$$

Привлекая неравенство (6) при $x_1 = x(t_1)$ и $x_2 = x$, отсюда получаем

$$\varphi(x) - \varphi(x(t_1)) \geq (\varphi'(x(t_1)), x - x(t_1)) \geq 0 \quad \forall x \in X(t_1),$$

таким образом,

$$\varphi(x) - \varphi(x(t_1)) \geq 0 \quad \forall x \in X(t_1),$$

что доказывает оптимальность исследуемого решения.

Теорема 20.3 полностью доказана.

Пример 20.1. Рассмотрим линейную задачу оптимального управления с терминальным функционалом со свободным правым концом $x(t_1) \in E^n$.

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & x \in E^2, \\ u \in E^2: |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1, \\ x_1(0) = -5, x_2(0) = 1 \\ \varphi(x(1)) = \|x(1)\|^2 \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}. \end{cases}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [t_0, t_1] = [0, 1], \quad M_0 = \{(-5, 1)\}, \quad M_1 = E^2,$$

$$U = \{(u_1, u_2) \in E^2: |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\} \text{ - квадрат.}$$

Класс допустимых управлений \mathcal{U}_U состоит из всех измеримых на отрезке $[0, 1]$ функций, причём $u(t) \in U$ для почти всех $t \in [0, 1]$. Терминальная функция $\varphi(x) = \|x\|^2$ является выпуклой непрерывно дифференцируемой в E^2 функцией, поэтому принцип максимума Понтрягина является в этой задаче необходимым и достаточным условием оптимальности.

Для решения этой задачи применяем принцип максимума Понтрягина (условие максимума а)); условие трансверсальности б) для одноточечного множества выполняется автоматически, и в решении задачи участия не принимает. Пусть $u(t) = (u_1(t), u_2(t))^*$ — оптимальное управление. Оно удовлетворяет условию максимума

$$a) (u(t), \psi(t)) = c(U, \psi(t))$$

с сопряжённой переменной $\psi(t)$, которая является решением задачи Коши

$$\dot{\psi} = 0, \quad \psi(1) = -\varphi'(x(1)) = -2x(1).$$

Так как $c(U, \psi) = |\psi_1| + |\psi_2|$, то условие максимума можно записать в виде

$$u_1(t)\psi_1(t) + u_2(t)\psi_2(t) = |\psi_1(t)| + |\psi_2(t)|. \quad (7)$$

Из (7) получаем, что

$$u_1(t) = \begin{cases} +1 & \text{если } \psi_1(t) > 0, \\ -1 & \text{если } \psi_1(t) < 0, \\ [-1, 1] & \text{если } \psi_1(t) = 0, \end{cases} \quad u_2(t) = \begin{cases} +1 & \text{если } \psi_2(t) > 0, \\ -1 & \text{если } \psi_2(t) < 0, \\ [-1, 1] & \text{если } \psi_2(t) = 0. \end{cases}$$

В последнем случае $\psi_1(t) = 0$ (или $\psi_2(t) = 0$) управление $u_1(t)$ (или $u_2(t)$) условием максимума (7) не определено однозначно. В данном примере сопряжённая переменная является константой

$$\psi(t) \equiv \bar{\psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2)^*, \quad t \in [0, 1],$$

которая определяется конечным условием $\psi(1) = -2x(1)$. То есть оптимальное управление определяется однозначно $u_1(t) = \text{sign} \bar{\psi}_1$ и $u_2(t) = \text{sign} \bar{\psi}_2$ в случае, когда константы $\bar{\psi}_1$ и $\bar{\psi}_2$ отличны от нуля.

Из уравнения движения $\dot{x} = u$ получаем

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t u_1(s) ds = -5 + \int_0^t u_1(s) ds,$$

откуда, используя неравенства $|u_1(t)| \leq 1$ и $t \leq 1$, получаем $x_1(1) \leq -4 < 0$, следовательно, $\bar{\psi}_1 = \psi_1(1) = -2x(1) > 0$ для любого допустимого процесса $(u(t), x(t))$, $t \in [0, 1]$. Таким образом, первая координата оптимального управления однозначно определяется:

$$u_1(t) = \text{sign} \bar{\psi}_1 = +1, \text{ а первая координата оптимальной траектории имеет вид } x_1(t) = -5 + t, \quad t \in [0, 1], \quad x_1(1) = -4.$$

Аналогично для второй координаты траектории имеем формулу

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t u_2(s) ds = 1 + \int_0^t u_2(s) ds,$$

откуда, используя неравенства $|u_2(t)| \leq 1$ и $t \leq 1$, получаем $x_2(1) \geq 0$. Если бы имело место неравенство $x_2(1) > 0$, то повторяя рассуждения, аналогичные проделанным в предыдущем абзаце, получили бы, что $u_2(t) \equiv -1$, но тогда вторая координата $x_2(t) = 1 - t$, откуда $x_2(1) = 0$, что противоречит сделанному предположению $x_2(1) > 0$. Таким образом, может быть реализован

только случай $x_2(1) = 0$. В этом случае для второй координаты сопряжённой переменной имеем $\psi_2 = 0$, $\psi_2(1) = 0$, следовательно $\dot{\psi}_2(t) \equiv 0$, $t \in [0, 1]$. Условие максимума в данном случае не позволяет однозначно определить вторую координату экстремального управления $u_2(\cdot)$. Однако, для второй координаты экстремальной траектории выполняются соотношения

$$0 = x_2(1) = 1 + \int_0^1 u_2(s) ds,$$

откуда

$$0 = \int_0^1 [u_2(s) + 1] ds,$$

и, в силу неотрицательности подынтегральной функции, имеем

$$u_2(s) + 1 = 0 \text{ для почти всех } s \in [0, 1],$$

то есть вторая координата $u_2(\cdot)$ оптимального управления однозначно определяется: $u_2(t) = -1$, а вторая координата оптимальной траектории имеет вид $x_2(t) = 1 - t$, $t \in [0, 1]$, $x_2(1) = 0$.

Вид оптимальной траектории показан на рис. 20.1.

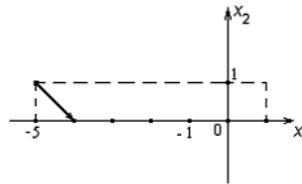


Рисунок 20.1.

Лекция Литература

- [1] Математическая теория оптимальных процессов. /Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. - М.: Наука, 1983.
- [2] Благодатских В.И. Линейная теория оптимального управления. - П.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.
- [3] Осколков К.И. Лекции по оптимальному управлению. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
- [4] Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. - М; Машиностроение, 1968.
- [5] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. - М: Наука, 1972.
- [6] Благодатских В.И., Григоренко Н.Л., Киселев Ю.Н. Практикум по оптимальному управлению. - М: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
- [7] Киселев Ю.Н. Линейная теория быстрогодействия с возмущениями: - М: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
- [8] На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач, - М: Мир, 1982.
- [9] Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальные игры. // - Труды Матем. ин-та АН СССР им. В.А.Стеклова. - 1985 - т.169, - с.119-158.
- [10] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М: Наука, 1983.
- [11] Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. - М.: Высшая школа, 2001.
- [12] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988.
- [13] Киселев Ю. Н. Оптимальное управление. - М.:Издательство Московского университета, 1986.
- [14] Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. - М.: Наука, 1966,1969.